UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN PSEUDO-BOOLEANA

ILKA A. GRIMALDO G.

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.

PANAMÁ

2002

APROBADO POR:

Dr. José del R. Garrido (Presidente)
PRESIDENTE

M. en C. Eyda N. Jiménez
MIEMBRO

Dra. Manuela Foster Vega
MIEMBRO

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORIA
DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

FECHA: 31 de mayo de 2002

RESUMEN

"APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN PSEUDO- BOOLEANA"

Se estudia un método para resolver sistemas de ecuaciones y desigualdades con variables bivalentes (que toman los valores 0 y 1). Después de esto, se trata la resolución de problemas de programación con variables bivalentes, en particular el método pseudo- booleano. Se revisa cómo un problema de programación en números enteros se puede reducir a un problema de programación bivalente. Finalmente, se explica cómo resolver problemas de programación bivalente con técnicas booleanas y se presentan ejemplos de algunas aplicaciones prácticas de estos problemas.

SUMMARY

"APPLICATION OF PSEUDO-BOOLEAN PROGRAMMING"

It's study a method to solve equations and inequalities systems, with bivalent variables, (they take values 0 and 1). After that, it treat the resolution of programming problem with bivalent variables, in particular, the Pseudo-Boolean Method. It's also check how a programming problem with integers can be reduce to a bivalent programming problem. Finally, it's explain how to solve bivalent programming problems with booleans tecniques and some applications practices are shown.

INDICE GENERAL

AGRADECIMIENTO

Me complace expresar mi gratitud al Doctor JOSÉ DEL ROSARIO GARRIDO, quien con empeño y dedicación me ayudó a alcanzar mi objetivo mediante su valioso asesoramiento y toda su colaboración en la preparación de este trabajo, así como a todos los profesores del Programa de Maestría en Investigación de Operaciones por brindarme su ayuda e interesantes conocimientos a través de estos estudios

INTRODUCCIÓN

Existe, en el análisis clásico, una gran diferencia entre problemas que pueden ser resueltos por métodos de cálculos y problemas que requieren técnicas combinatorias Con el surgimiento de las computadoras esta diferencia se aminora, y con el énfasis creciente sobre problemas que involucran optimización sobre estructuras, esta distinción desaparece.

Se hizo necesaria una nueva y más flexible teoría matemática que incluyera algoritmos clásicos, tanto los discretos como los continuos; para el tratamiento computacional y analítico de problemas surgidos en la teoría de control, economía matemática, teoría de proyectos, investigación de operaciones, bioingeniería y otros campos

El trabajo de Hammer (Ivanescu) y Rudeanu sobre Métodos Booleanos representa un importante paso en esta dirección y estimula una gran cantidad de investigaciones adicionales en la teoría y aplicación de estos métodos

Es natural el uso de variables bivalentes cuando enfrentamos problemas que tienen sólo dos resultados posibles La importancia y extensión de esta clase de problemas de "decisiones binarias" fue señalada primeramente por G. B. Dantzig en 1957. Desde entonces muchos estudios se han publicado sobre estos tópicos Algunos trabajos aplican técnicas booleanas, las cuales utilizan propiedades del álgebra booleana, mientras otros son principalmente combinatorios.

Peter I. Hammer (Ivanescu) y Sergio Rudeanu en 1967, tratan las aplicaciones de las técnicas booleanas en investigación de operaciones y áreas relacionadas. Utilizan como principales herramientas el cálculo de matrices booleanas, ecuaciones booleanas y la programación pseudo-booleana La programación pseudo-booleana incluye un método para resolver problemas bivalentes (0, 1) que fue desarrollado por I. Rosenberg y otros en 1963 usando una idea de R Fortet

El método de programación pseudo-booleana presentado (en forma mejorada) por Hammer y Rudeanu es una combinación del principio de programación dinámica de R. Bellman con procedimientos booleanos Varias aplicaciones de este método han sido realizadas por Hammer y Rudeanu, así como por otros autores basados en su primera versión (no mejorada). Estas son las contribuciones de I. Rosenberg, Y. Ixagaxt y K. Sugino, U S R Murty, G.B. Ihde, J. Kral y otros

Los métodos de programación pseudo-booleana permiten la solución de problemas bivalentes lineales y no lineales así como varias generalizaciones que incluyen programación polinomial entera

Los problemas de optimización en los cuales las variables asumen valores enteros debido a interpretaciones económicas y técnicas, no se pueden resolver con los métodos acostumbrados de programación lineal.

La preocupación por este tipo de problemas surge de modo natural en el contexto de una tradición de investigación en el dominio de la lógica matemática y en las aplicaciones a la teoría de automatización

El estudio del método de programación pseudo-booleana y de sus aplicaciones brinda las bases para abordar, plantear y finalmente solucionar este tipo de problemas

Este estudio sobre "Aplicaciones de la Programación Pseudo-Booleana.

- Trata sobre problemas de optimización en las cuales las variables asumen valores enteros debido a interpretaciones económicas y técnicas
- Revisa cómo un problema de programación con números enteros se puede reducir a un problema de programación bivalente
- Define, en el Capítulo 1, los conceptos preliminares de la programación pseudo-booleana
- Desarrolla, en el Capítulo 2, un método para resolver sistemas de ecuaciones y desigualdades bivalentes, llamadas ecuaciones y desigualdades pseudo-booleanas.

- Explica, en el Capítulo 3, el método pseudo-booleano mejorado para la resolución de problemas de programación con variables bivalentes.
- Presenta, en el Capítulo 4, algunos ejemplos de aplicaciones prácticas de estos problemas

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS PRELIMINARES

CONCEPTOS PRELIMINARES.

1.1. Algebra Booleana.

El álgebra booleana tiene sus primeras aplicaciones en el estudio de los circuitos eléctricos. Los problemas de "decisiones binarias", es decir, problemas que envuelven sólo dos posibles resultados, son encontrados frecuentemente en la investigación de operaciones, teoría de grafos, matemática combinatoria, etc.

Los conceptos que definiremos tienen aplicación en problemas típicos de optimización de funciones booleanas y en la solución de ciertas ecuaciones booleanas.

Definición 1.1: Un **ALGEBRA BOOLEANA** es un conjunto B (finito o infinito) en el cual son distinguidos dos elementos, 0 y 1, y donde tres operaciones: $\cup$ (disyunción), $\cdot$ (conjunción) y $-$ (negación) son definidas y satisfacen las siguientes propiedades.

(1) $\begin{bmatrix} x \cup y = y \cup x \\ x \cdot y = y \cdot x \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} (x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z) \\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} x \cup x \cdot y = x \\ x \cdot (x \cup y) = x \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} x \cup (y \cdot z) = (x \cup y) \cdot (x \cup z) \\ x \cdot (y \cup z) = (x \cdot y) \cup (x \cdot z) \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} x \cup 1 = 1 \\ x \cdot 0 = 0 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} x \cup \overline{x} = 1 \\ x \cdot \overline{x} = 0 \end{bmatrix}$

En un álgebra booleana, se cumplen además, las siguientes propiedades.

(7) $\begin{bmatrix} x \cup x = x \\ x \cdot x = x \end{bmatrix}$ (8) $\begin{bmatrix} x \cup 0 = x \\ x \cdot 1 = x \end{bmatrix}$

(9) $\begin{bmatrix} x\cup y=0 \text{ sii } x=y=0 \\ x\cdot y=1 \text{ sii } x=y=1 \end{bmatrix}$ (10) $\begin{bmatrix} \overline{x\cup y}=\overline{x}\cdot\overline{y} \\ \overline{x\cdot y}=\overline{x}\cup\overline{y} \end{bmatrix}$

(11) $\overline{\overline{x}}=x$ (12) $\begin{bmatrix} x\cup(\overline{x}\cdot y)=x\cup y \\ x\cdot(\overline{x}\cup y)=x\cdot y \end{bmatrix}$

donde x, y, z son elementos arbitrarios de B

El orden $\leq$ verifica también las siguientes propiedades

(13) $\begin{bmatrix} x\leq y \text{ sii } x\cup y=y \\ x\leq y \text{ sii } x\cdot y=x \end{bmatrix}$ (14) $\begin{bmatrix} x\leq x\cup y\ ,\ y\leq x\cup y \\ x\cdot y\leq x\ ,\ x\cdot y\leq y \end{bmatrix}$

(15) $\begin{bmatrix} \text{Si } x\leq z, y\leq z \text{ entonces } x\cup y\leq z \\ \text{Si } t\leq x,\ t\leq y \text{ entonces } t\leq x\cdot y \end{bmatrix}$

(16) $\begin{bmatrix} x\leq z, y\leq z \text{ sii } x\cup y\leq z \\ t\leq x,\ t\leq y \text{ sii } t\leq x\cdot y \end{bmatrix}$

(17) $\begin{bmatrix} x\leq y \text{ implica } x\cdot z\leq y\cdot z \\ x\leq y \text{ implica } x\cup z\leq y\cup z \end{bmatrix}$ (18) $\begin{bmatrix} x\leq 1 \\ 0\leq x \end{bmatrix}$

(19) $\begin{bmatrix} x\leq y \text{ sii } \overline{x}\cup y=1 \\ x\leq y \text{ sii } x\cdot\overline{y}=0 \end{bmatrix}$

(20) $\begin{bmatrix} x=y \text{ sii } x\cdot\overline{y}\cup\overline{x}\cdot y=0 \\ x=y \text{ sii } (\overline{x}\cup y)\cdot(x\cup\overline{y})=1 \end{bmatrix}$

donde x, y, z son elementos arbitrarios de B

1.1.1. Principio de Dualidad:

Si la propiedad de B, expresada en términos de las operaciones $\cup$, $\cdot$, $-$; de las relaciones $\leq$, $\geq$ y las constantes 0, 1; es válida, entonces la "**PROPIEDAD DUAL**", obtenida intercambiando $\cup$ con $\cdot$, $\leq$ con $\geq$ y 0 con 1, también es válida.

Por ejemplo, la mayor parte de las propiedades anotadas anteriormente son anotadas en **PAREJAS DUALES.**

El principio de dualidad es uno de los teoremas centrales del álgebra booleana.

Las propiedades (7) al (20) se pueden deducir de las seis primeras (1) a (6), aplicando el principio de dualidad.

1.1.2. Ejemplos de Álgebras Booleanas.

Ejemplo 1: La estructura algebraica formada por el conjunto de dos elementos $B_2 = \{0,1\}$, junto con las operaciones de disyunción ($\cup$), conjunción ($\cdot$) negación ($-$), definidas respectivamente como sigue:

(i) $0 \cup 0 = 0$, $0 \cup 1 = 1 \cup 0 = 1$

(ii) $0 \cdot 0 = 0 \quad 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$

(iii) $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$

Es un álgebra booleana, llamada **ÁLGEBRA BOOLEANA DE DOS ELEMENTOS.**

Nota: En esta definición, 0 y 1 no representan números. Sin embargo, es necesario utilizar estos elementos como números para el estudio posterior de las funciones pseudo-booleanas.

El álgebra booleana de dos elementos B_2; satisface además la propiedad.

(21) $\begin{bmatrix} x \cup y = 1 & \text{sii} & x = 1 \text{ ó } y = 1 \\ x \cdot y = 0 & \text{sii} & x = 0 \text{ ó } y = 0 \end{bmatrix}$

Una característica especial de B_2 es que las operaciones booleanas pueden ser expresadas en una forma aritmética

(22) $x \cup y = x + y - xy$

(23) $\overline{x} = 1 - x$

y además

(24) $\overline{x \cdot y} = 1 - xy$

(25) $\overline{x \cup y} = \overline{x} \cdot \overline{y} = (1 - x)(1 - y)$

además en B_2 se define:

(26) $x^0 = \overline{x}$ $\qquad\qquad x^1 = x$

Ejemplo 2: El conjunto de matrices booleanas (matriz de ceros y unos) de orden m×n, es un álgebra booleana con respecto a las operaciones $\cup$, $\cdot$ y $-$ definidas por:

Disyunción

(27) $(a_{ij}) \cup (b_{ij}) = (a_{ij} \cup b_{ij})$

Conjunción:

(28) $(a_{ij}) \cdot (b_{ij}) = (a_{ij} \cdot b_{ij})$

Negación

(29) $\overline{(a_{ij})} = (\overline{a_{ij}})$

En las matrices booleanas mxn se define además la siguiente relación de orden

(30) $(a_{ij}) \leq (b_{ij})$ sii $a_{ij} \leq b_{ij}$, para todo i, j.

Los elementos distinguidos 0 y 1 para las matrices booleanas m×n son

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & . & 0 \\ & & \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad 1 = \begin{pmatrix} 1 & ... & 1 \\ & & \\ 1 & ... & 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Observación: Dos matrices booleanas no son necesariamente comparables

1.2. Funciones Booleanas

Definición 1.2: Una **función booleana** f es una aplicación.

$$f : B_2^n = \underbrace{B_2 x B_2 x \quad x B_2}_{\text{n veces}} \longrightarrow B_2$$

esto es, es una función cuyos argumentos y valores dependen de B_2

Ejemplo 3: El conjunto de todas las funciones booleanas de n variables, resulta también un álgebra booleana, donde 0 y 1 son las funciones de n variables definidas por

$0(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, $1(x_1, x_2, ..., x_n)=1$

para todo $(x_1, x_2, ..., x_n) \in B_2^n$

y las operaciones de disyunción, conjunción y negación son definidas como sigue

Si f y g son funciones booleanas de n variables;

su disyunción será la función $f \cup g$ de n variables definida por.

$$(f\cup g)(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_n)\cup g(x_1,\ldots,x_n) \tag{32}$$

su conjunción será la función fg definida por

$$(f\cdot g)(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_n)\cdot g(x_1,\ldots,x_n) \tag{33}$$

la negación de la función booleana de n variables f será la función $\bar{f}$ definida por

$$\bar{f}(x_1,\ldots,x_n)=\overline{f(x_1,\ldots,x_n)}$$

1.2.1 Expresiones Booleanas

Una función booleana tiene una "expresión booleana" como por ejemplo

$$f(x,y,z)=x\ y\ z\cup x\ y\ z\cup x\ y\ z\cup x\ y\ z$$

ó $\quad x\cup(y\cdot\bar{z})\quad$ ó $\quad y\cdot(\bar{x}\cup\overline{(y\ z)\ (t\cup\bar{x}\cdot y)})$

Una **expresión booleana** está constituida por un número finito de variables booleanas, ligadas por operaciones booleanas, de acuerdo a la siguiente información:

Definición 1.3:

1) 0 y 1 son expresiones booleanas

2) las indeterminaciones $x_1^1,x_1^0,x_2^1,x_2^0,\ldots,x_n^1,x_n^0$

son expresiones booleanas

Son llamadas indeterminaciones pues dependen del valor de las x_i, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ las que toman los valores 0 ó 1

3) Si E_1 y E_2 son expresiones booleanas, entonces

$$E_1 \cup E_2, \qquad E_1 \cdot E_2 \qquad \text{y} \qquad \overline{E_1}$$

son expresiones booleanas

4) Cualquier expresión booleana es formada por una aplicación repetida de las reglas 1), 2), 3)

1.2.2 Conjunciones Elementales y Disyunciones Elementales

Definición 1.4': Las expresiones booleanas que no contienen disyunciones son llamadas **conjunciones elementales.**

Ejemplos $x^1 \cdot y^0 \cdot z^0$, $x^1 \cdot y^1 \cdot z^0$, x^1, y^0, 0, 1, $x_1^1 \ldots x_n^1$, etc

Definición 1.4'': Las expresiones booleanas que no contienen conjunciones son llamadas **disyunciones elementales.**

Ejemplos $x^1 \cup y^0 \cup z^0$, $x^1 \cup y^1 \cup z^0$, x^1 , y^0, 0, 1, $x_1^1 \cup \ldots \cup x_n^1$, etc

1.2.3. Forma Disyuntiva y Forma Conjuntiva

Definición 1.5': Una disyunción de conjunciones elementales, esto es, una expresión del tipo

$$c_1 \cup c_2 \cup ... \cup c_r \qquad (35)$$

donde c_1, c_2 c_r son conjunciones elementales, es llamada una **forma disyuntiva.**

Definición 1.5": Una conjunción de disyunciones elementales, esto es, una expresión del tipo

$$d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_r \qquad (36)$$

donde $d_1, d_2,$ $, d_r$ son disyunciones elementales, es llamada una **forma conjuntiva.**

Definición 1.6: La función f_E generada por una expresión booleana E es la función booleana obtenida de E interpretando los caracteres x_1, x_2, ..., x_n encontrados en las indeterminaciones $x_1^0, .. , x_n^0$ como variables en B_2, los exponentes 0 y 1 como funciones definidas por $x^0 = \bar{x}, x^1 = x$, los conectivos $\cup$, $\cdot$ y $-$ como las funciones definidas por (*i*), (*ii*) y (*iii*), respectivamente, y los caracteres 0 y 1 como las funciones constantes $0(x) = 0$, $1(x) = 1$, respectivamente

Debemos distinguir entre funciones booleanas y expresiones booleanas Por un lado, una expresión booleana genera una función booleana simple, mientras que, una función booleana es generada por varias expresiones booleanas.

Por ejemplo, $x \cup y$, $x \cup \bar{x} \cdot y$ son diferentes, pero generan la misma función

$$f(x, y) \qquad f(0,0)=0 \quad , \quad f(0,1)=f(1,0)=f(1,1)=1$$

Sin embargo, adoptaremos la convención usual y denotaremos igual a una expresión booleana que a la función booleana generada por ella

Por ejemplo, escribiremos $x \cup \bar{x}\, y = x \cup y$; en lugar de

$$f_{\left[x \cup \bar{x}\, y\right]} = f_{[x \cup y]}$$

Cada función booleana es generada por, al menos, una expresión booleana

Propiedad 1.1.: Cada función booleana f puede ser escrita en la forma

$$(37) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \coprod_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

donde $\coprod_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ significa que la disyunción es extendida sobre todos los 2^n posibles valores de los vectores $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in B_2^n$.

Observación : La fórmula (37) puede ser escrita en la forma

(38) $$f(x_1,x_2, \ldots ,x_n)= \coprod_{\alpha_1, \ldots ,\alpha_n} (x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n})$$

donde $\coprod_{\alpha_1, \ldots ,\alpha_n}$ significa que la disyunción es extendida sobre aquellos valores $(\alpha_1,\alpha_2, \ldots ,\alpha_n)\in B_2^n$ para los cuales $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1$

1.2.4 Forma Canónica Disyuntiva y Forma Canónica Conjuntiva

Nótese que (37) es una forma disyuntiva con la propiedad especial de que en cada una de las conjunciones todas las variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ aparecen

Definición 1.7: El miembro derecho de la relación (38) se llamará **forma disyuntiva canónica** de la función $f(x_1,x_2, \ldots ,x_n)$

Cada conjunto de la forma $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ (que contiene todas las variables $x_1,x_2, \ldots ,x_n$) es llamado una **conjunción elemental completa** de $x_1,x_2, \ldots ,x_n$

Propiedad 1.2 Cada función booleana f puede ser escrita en la forma

(39) $$f(x_1,x_2, \ldots ,x_n)= \prod_{\alpha_1,\alpha_2, \ldots ,\alpha_n} \left\{ f(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2, \ldots \bar{\alpha}_n)\cup x_1^{\alpha_1} \cup x_2^{\alpha_2} \cup \ldots \cup x_n^{\alpha_n} \right\}$$

donde $(\alpha_1,\alpha_2, \ldots ,\alpha_n)$ toma todos los posibles valores de B_2^n donde $\prod_{\alpha_1,\alpha_2 \ldots \alpha_n}$ significa que la conjunción es extendida sobre todos los 2^n posibles valores de B_2^n

Observación: La fórmula (39) puede ser escrita en la forma

$$(40) \qquad f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \prod_{\alpha_1, \ldots \alpha_n} (x_1^{\alpha_1} \cup x_2^{\alpha_2} \cup \ldots \cup x_n^{\alpha_n})$$

donde $\prod_{\alpha_1, \ldots \alpha_n}$ significa que la conjunción es extendida sobre aquellos valores

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in B_2^n$ para los cuales $f(\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n) = 0$

Definición 1.7": El miembro derecho de la relación (40) se llamará **forma canónica conjuntiva** de la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Cada disyunción de la forma $x_1^{\beta_1} \cup x_2^{\beta_2} \cup \ldots \cup x_x^{\beta_n}$ (que contiene todas las variables $x_1, x_2, \ldots x_n$) es llamada una **disyunción elemental completa** de $x_1, x_2, \ldots x_n$

1.3. Funciones Pseudo_Booleanas

Definiciones 1.8: Sea $\Re$ el campo de los números reales, una **función pseudo - booleana** es una función

$$(41) \quad f : B_2^n \longrightarrow \Re$$

es una función de elementos bivalentes, con valores reales

Los datos basados en aplicaciones no son usualmente reales, sin embargo, si resultan números racionales pueden ser transformados a enteros multiplicándolos por un entero apropiado. Por esta razón, en los ejemplos podemos asumir que los datos van a ser enteros

R. Fortet llama a estas funciones "funciones algebraicas enteras". Si los elementos 0 y 1 de B_2 son identificados con los números 0 y 1, lo cual asumiremos en lo que sigue, entonces la función booleana

$$\varphi . B_2^n \longrightarrow B_2$$

es también una función pseudo– booleana

Propiedad 1.3: Cada función pseudo- booleana puede ser escrita en la forma

$$(42)\quad f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{\alpha_1\,\alpha_2\,\dots\,\alpha_n} c_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\; x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$$

donde la suma $\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n}$ es extendida sobre los 2^n valores del vector $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in B_2^n$ y los coeficientes $c_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_n}$ son únicamente determinados por las relaciones.

$$(43)\qquad c_{\alpha_1\,\alpha_2,\dots,\alpha_n}=f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$$

Demostración

Usando las fórmulas $x^0=\bar{x}=(1-x)$, $x'=x$

$$\bar{0}=1 \qquad , \qquad \bar{1}=0$$

concluimos que, para cada $\alpha,\beta\in B_2$

$$\alpha^{\beta}=\begin{cases}1 \text{ , si } \alpha=\beta\\ 0 \text{ , si } \alpha\neq\beta\end{cases}$$

En efecto

$$x^0 = (1-x) = \begin{cases} 1 \text{ , si } x = 0 \\ 0 \text{ , si } x = 1 \end{cases}$$

$$x^1 = x = \begin{cases} 1 \text{ , si } x = 1 \\ 0 \text{ , si } x = 0 \end{cases}$$

De aquí que para $\alpha_1, \alpha_2, \ \ , \alpha_n \in B_2$

tenemos

$$x_1^{\alpha_1} \ \ x_n^{\alpha^n} = \begin{cases} 1 \text{ , si } x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ \ , x_n = \alpha_n \\ 0 \text{ , de otra forma} \end{cases}$$

de donde resulta que para cualquier sistema de valores $x_1, x_2, \ \ , x_n$ el lado derecho de (42) se reduce a $c_{\beta_1, \beta_2, \ \ , \beta_n} \beta_1^{\beta_1} \beta_2^{\beta_2} \ \ \beta_n^{\beta_n} = f(\beta_1, \beta_2, \ \ , \beta_n)$

de donde

$$c_{\beta_1 \ \beta_2, \ . \beta_n} = f(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

Así

$$f(x_1, x_2, \ \ , x_n) = \sum_{\beta_1 \ \beta_2 \ \ \beta_n} f(\beta_1, \beta_2, \ \ , \beta_n) x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2}, \ \ , x_n^{\beta_n}$$

como ahora los valores 0 y 1 son números reales, usámos $\sum\limits_{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ \alpha_n}$ en lugar de

$$\coprod_{\alpha_1 \ \alpha_2, \ . \alpha_n}$$

Ejemplo 4 La función pseudo- booleana

$$(44) \quad f(x_1,x_2,x_3)=2x_1\bar{x}_2+6x_1x_3-5\bar{x}_2\bar{x}_3$$

puede ser definida por la siguiente tabla

Tabla 1

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	
0	0	0	- 5	- 5
0	0	1	- 5 + 5	0
0	1	0	- 5 + 5	0
0	1	1	- 5 + 5 +5 - 5	0
1	0	0	- 5 + 2	- 3
1	0	1	- 5 + 2 + 5 + 6	8
1	1	0	- 5 + 2 + 5 - 2	0
1	1	1	- 5 + 2 + 5 + 6 + 5 - 2 – 5	6

y puede ser escrita en la forma

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1(1-x_2)+6x_1x_3-5(1-x_2)(1-x_3)$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1-2x_1x_2+6x_1x_3-(5-5x_2)(1-x_3)$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1-2x_1x_2+6x_1x_3-5+5x_2+5x_3-5x_2x_3$$

$$(44') \qquad f(x_1,x_2,x_3)=-5+2x_1+5x_2+5x_3-2x_1x_2+6x_1x_3-5x_2x_3$$

sustituyendo $\bar{x}$ por $(1-x)$

La misma función también puede ser escrita en la forma

$$(44'') \quad f(x_1,x_2,x_3)=-5\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3-3x_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3+8x_1\,\bar{x}_2\,x_3+6x_1x_2x_3$$

la cual es obtenida de la tabla de arriba por aplicación de la propiedad 1.3.

Por la propiedad 1.3 tenemos:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\,x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{u_1,u_2,\ldots,u_n} f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\,x_1^{u_1}\,x_2^{\alpha_2}\,x_3^{\alpha_3}$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=-5x_1^0x_2^0x_3^0-3x_1^1x_2^0x_3^0+8x_1^1x_2^0x_3^1+6x_1^1x_2^1x_3^1$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=-5\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3-3x_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3+8x_1\,\bar{x}_2\,x_3+6x_1x_2x_3$$

CAPÍTULO 2

SISTEMAS DE ECUACIONES

Y DESIGUALDADES PSEUDO-BOOLEANAS

La necesidad de solucionar un sistema de ecuaciones y desigualdades con variables bivalentes. (0,1), resulta, por un lado del hecho de que los modelos matemáticos de algunos procesos económicos reflejan un sistema de este tipo y, por otro lado del hecho de que los métodos descritos para la resolución de problemas bivalentes se basan en el conocimiento de familias de soluciones y las restricciones

Estudiaremos primeramente una desigualdad de la forma

(1) $\quad c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \geq b$

Reemplazando cada x_i para la cual $c_i < 0$ con $(1-\overline{x_i})$; y denotando después de esto la transformación de la nueva variable con X_i (igual a x_i si $c_i \geq 0$, igual a $\overline{x_i} = 1 - x_i$, si $c_i < 0$), el término libre con d y reordenando las variables, la desigualdad (1) puede llevarse a la forma

(2) $\quad c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n \geq d$

donde

(3) $\quad c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_n \geq 0$

$$X_i = \begin{cases} x_i & , \ si \quad c_i \geq 0 \\ \overline{x_i} = 1 - x_i \Leftrightarrow x_i = 1 - \overline{x_i} & , \ \text{si} \quad c_i < 0 \end{cases}$$

2.1 Solución de Base y Familia de Soluciones de una Desigualdad Pseudo-Booleana

Definición 2.1 Una solución $S^{*}=(X_1^{*}, \ldots, X_n^{*})$ de la inecuación (2) va a denominarse una solución de base si para cualquier i con $X_i^{*}=1$, el vector $\left(X_1^{*},\ldots,X_{i-1}^{*},0, X_{i+1}^{*},\ldots, X_n^{*}\right)$ no es solución de la desigualdad (2).

Sea I el conjunto de índices i para los cuales $X_i^{*}=1$ y sea J un conjunto que contiene a I: $J \supseteq I$. Vamos a denotar con $F(S^*, J)$ el conjunto de todos los vectores $S(X_1, \ldots, X_n)$ con la propiedad de que $X_j = 1$ para todos los $j \in J$, las otras componentes X_k ($k \notin J$) siendo arbitrarias (0 ó 1)

Es evidente que cualquier vector $S \in F(S^*, J)$ es una solución de (2). El conjunto $F(S^*, J)$ va a denominarse una **familia de soluciones** de (2).

Para determinar todas las soluciones de base de la desigualdad (2) vamos a aplicar respectivamente la siguiente regla:

1°) Si $d \leq 0$ entonces la única solución de base es $X_1 = \ldots = X_n = 0$

2°) Si $d > 0$ y $c_1 \geq \ldots \geq c_p \geq d \geq c_{p+1} \geq \ldots \geq c_n$;

entonces

(α) para cualquier $k \in \{1,2, \ldots, p\}$, el vector $X_k = 1$, $X_j = 0$ $(j \neq k)$ es una solución de base (β) las otras soluciones de base deben buscarse entre los vectores que satisfacen $X_1 = \ldots = X_p = 0$ y $\sum_{j=p+1}^{n} c_j X_j \geq d$

3°) Si $d > 0$, $c_i < d$ $(i \in \{1,2,\ldots,n\})$ y $\sum_{i=1}^{n} c_i < d$ entonces no existe solución

4°) Si $d > 0$, $c_i < d$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$ y $\sum_{i=1}^{n} c_i = d$ entonces la única solución de base es $X_1 = \ldots = X_n = 1$

5°) Si $d > 0$, $c_i < d$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$ y $\sum_{i=1}^{n} c_i > d$ y $\sum_{j=2}^{n} c_j \leq d$ entonces la solución de base debe buscarse entre los vectores que satisfacen $X_1 = 1$ y en consecuencia

$$\sum_{j=2}^{n} c_j X_j \geq d - c_1$$

6°) Si $d > 0$, $c_i < d$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$ y $\sum_{i=1}^{n} c_i > d$ y $\sum_{j=2}^{n} c_j > d$ entonces deben estudiarse separadamente los casos

$6r_1$) $X_1 = 1$ y en consecuencia $\sum_{j=2}^{n} c_j X_j \geq d - c_1$

$6r_2$) $X_1 = 0$ y en consecuencia $\sum_{j=2}^{n} c_j X_j \geq d$

Sean $S_k^* = (X_{k_1}^*, \ldots, X_{k_n}^*)$, $(k \in \{1,2,\ldots,K\})$, todas las soluciones de base de la desigualdad (2) Denotemos para cada k con $u(k)$ el último índice para el que la componente correspondiente de S_k^* es igual a 1

(4) $\quad X_{k_{u(k)}}^* = 1, \quad X_{k_v}^* = 0 \qquad (v > u(k))$

Sea $J_k = \{1,2,\ldots,u(k)\}$. Entonces tiene lugar la siguiente afirmación,

Propiedad 2.1 La familia de soluciones $F(S_k^*, J_k)$, $(k \in \{1,\ldots,K\})$, contiene todas las soluciones de la desigualdad (2) y ellas son dos a dos disjuntas

2 1 1 **Ejemplo I** Para resolver la desigualdad

(5) $\quad x_1 + 7x_2 + 7\bar{x}_3 - 2x_4 - 9\bar{x}_5 + 3x_6 \geq 9$

$$x_1 + 7x_2 + 7\bar{x}_3 - 2(1-\bar{x}_4) - 9(1-x_5) + 3x_6 \geq 9$$

$$x_1 + 7x_2 + 7\bar{x}_3 + 2\bar{x}_4 + 9x_5 + 3x_6 \geq 9 + 2 + 9 = 20$$

tenemos

(5') $\quad X_1 = x_5, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 = \bar{x}_3, \quad X_4 = x_6, \quad X_5 = \bar{x}_4, \quad X_6 = x_1,$

de donde obtenemos

(6) $\quad 9X_1 + 7X_2 + 7X_3 + 3X_4 + 2X_5 + X_6 \geq 20$

Desigualdad que se encuentra en el caso 5° anterior, luego debe tenerse $X_1 = 1$, lo que conduce a la desigualdad

(7) $7X_2 + 7X_3 + 3X_4 + 2X_5 + X_6 \geq 11$

que se encuentra en el caso 6°, por consiguiente deben estudiarse separadamente los casos

a) $X_2 = 1$ b) $X_2 = 0$

a) Para $X_2 = 1$ obtenemos la desigualdad

(8) $7X_3 + 3X_4 + 2X_5 + X_6 \geq 4$

la cual estando en el caso 2° admite la solución de base

$X_3 = 1,$ $X_4 = X_5 = X_6 = 0$ Así que la primera solución para (6) es

(1, 1, 1, 0, 0, 0)

Para estudiar el caso $X_3 = 0$, tenemos

(9) $3X_4 + 2X_5 + X_6 \geq 4$

Aplicando dos veces las conclusiones del caso 5°,

$X_4 = 1,$ $2X_5 + X_6 \geq (4-3) = 1$ (Iª aplicación)

$X_5 = 1,$ $X_6 \geq 1 - 2 = -1$ (2ª aplicación)

$X_6 = 0$

deducimos que (9) tiene la solución de base única

$X_4 = X_5 = 1,$ $X_6 = 0$ La segunda solución de (6) es (1, 1, 0, 1, 1, 0)

b) Tomando para (7), $X_2 = 0$, obtenemos

(10) $7X_3 + 3X_4 + 2X_5 + X_6 \geq 11$

La aplicación repetida de las condiciones del caso 5°

$X_3 = 1, \quad 3X_4 + 2X_5 + X_6 \geq 4$ (1ª aplicación)

$X_4 = 1, \quad 2X_5 + X_6 \geq 1$ (2ª aplicación)

$X_5 = 1, \quad X_6 \geq 1 - 2 = -1$ (3ª aplicación)

$X_6 = 0$

muestra que la única solución de base de la inecuación (10) es

$X_3 = X_4 = X_5 = 1, \quad X_6 = 0$

Así que la tercera solución de (6) es (1, 0, 1, 1, 1, 0)

Por consiguiente la desigualdad (6) tiene las siguientes tres soluciones de base

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0

Así tenemos $J_1 = \{1, 2, 3\}$ y $J_2 = J_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Volviendo a la desigualdad (5) y teniendo en cuenta (5') encontramos en el siguiente tablero la familia de soluciones.

EJEMPLO 1

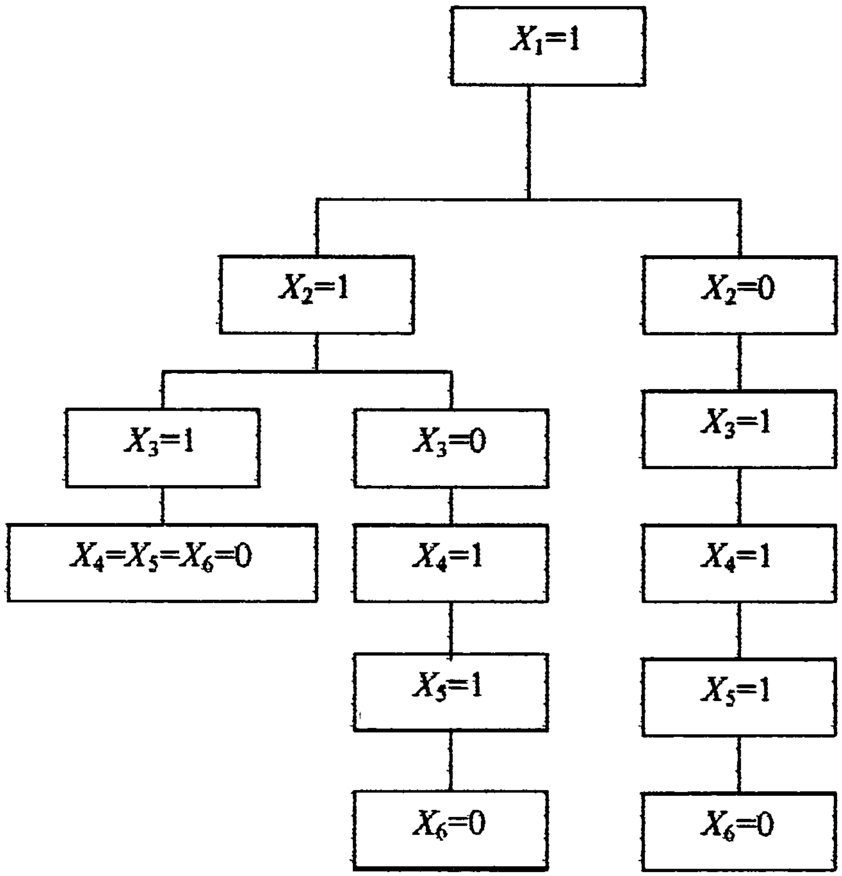


Figura 1

Sol.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	-	1	0	-	1	-
2	-	1	1	0	1	1
3	-	0	0	0	1	1

Aquí, el guión -, indica las variables arbitrarias de la familia

El método anterior puede ser utilizado también para dar solución a un sistema de ecuaciones o inecuaciones con variables bivalentes

2 2 Algoritmo de Tres Etapas para solucionar Sistemas de Desigualdades Pseudo-Booleanas (Página 82, [1], (ver bibliografía))

Etapa 1: Al reemplazar las inecuaciones en las formas $f > 0$, $g < 0$, $h \leq 0$ respectivamente por inecuaciones en las formas

$f - 1 \geq 0$ $\quad -g - 1 \geq 0$, $\quad -h \geq 0$ y a la ecuación en la forma $e = 0$ por el par de desigualdades $e \geq 0$ y $e \leq 0$ se puede obtener un sistema que contiene solamente ecuaciones de la forma

$$F \geq 0$$

Etapa 2 Sean $x_1, x_2, \ \ , x_n$ las variables del sistema Utilizando las relaciones $\overline{x_i} = 1 - x_i$ y $x_j = 1 - \overline{x_j}$, podemos escribir cada inecuación del sistema de la forma

$$(11) \quad C^i_{i_1} \tilde{x}_{i_1} + C^i_{i_2} \tilde{x}_{i_2} + \ldots + C^i_{i_m} \tilde{x}_{i_m} \geq d^i$$

donde $\tilde{x}_{i_1}, \ \ \tilde{x}_{i_m}$ son aquellas variables $x_1, \ \ , x_n$ de las cuales la desigualdad respectiva depende efectivamente, $\tilde{x}$ es x ó $\overline{x}$, respetando la relación.

$$C^i_{i_1} \geq C^i_{i_2} \geq \ \ \geq C^i_{i_m} \geq 0, \qquad i \in \{1, 2, \ldots, n\} \qquad m \leq n$$

Etapa 3 Se basa en la siguiente idea Cada desigualdad considerada separadamente se escribe en forma canónica con respecto a las variables x contenidas en ella, de aquí que de las conclusiones anteriores referentes a la desigualdad, se deducen las conclusiones referentes al sistema completo

Por ejemplo, si cierta desigualdad del sistema no tiene solución, el sistema es incompatible En el mismo sentido vemos que si alguna desigualdad tiene todas sus soluciones y algunas variables fijadas $x_{i_1} = x^*_{i_1}, \ \ , x_{i_m} = x^*_{i_m}$, entonces en cualquier solución del sistema (si el sistema es compatible) las variables $x_{i_1}, \ \ , x_{i_m}$ deben tener los valores fijados anteriormente

2.3 Conclusiones Referentes a las Desigualdades del Sistema

En lo que sigue presentamos una lista de las conclusiones referentes a la desigualdad

$$(11) \quad \sum_{j=1}^{m(i)} C_{ij}^{i}\, x_{ij} \geq d^{i}$$

del sistema considerado Aplicando sucesivamente estas conclusiones, se obtienen las soluciones del sistema inicial, agrupadas en dos conjuntos disjuntos

1°) Si $d^{i} \leq 0$, la desigualdad es redundante, y así ella puede ser eliminada del sistema

2°) Si $d^{i} > 0$, $C_{i_1}^{i} \geq \quad \geq C_{ip}^{i} \geq d^{i} \geq C_{i(p+1)}^{i} \geq \quad \geq C_{im(i)}^{i}$ entonces existen las siguientes $(p+1)$ posibilidades $\alpha_1, \ldots \alpha_p, \beta$.

$$(\alpha_k) \quad x_{i_1} = \quad = x_{i(k-1)} = 0, \quad x_{ik} = 1, \quad x_{i(k+1)} = \quad x_{ip} = 0$$

$$(k \in \{1,2,\ldots,p\})$$

son soluciones base de la desigualdad (11)

(β) Las otras soluciones de base de la desigualdad (11) deben buscarse entre los vectores que satisfacen

$$x_{i_1} = \quad = x_{i_p} = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=(p+1)}^{m(i)} c_{ij}^{i}\, x_{ij} \geq d^{i}$$

3°) Si $d^{i} > 0$, $C_{ij}^{i} < d^{i}$, $(j \in \{1,2, \quad ,m(i)\})$ y

$\sum_{j=1}^{m(i)} c_{ij}^{i} < d^{i}$, entonces la desigualdad y el sistema son incompatibles.

4°) Si $d^{i} > 0$, $\quad C_{ij}^{i} < d^{i}$, $\quad (j \in \{1,2, \ldots ,m(i)\})$ y

$\sum_{j=1}^{m(i)} c_{ij}^{i} = d^{i}$, entonces todas las variables $x_{i_1}, \ldots ,x_{i_{m(i)}}$ tienen valor fijado 1

5°) Si $d^{i} > 0$, $\quad c_{ij}^{i} < d^{i}$, $\quad (j \in \{1,2,\ldots,m(i)\})$ y $\sum_{j=1}^{m(i)} c_{ij}^{i} > d^{i}$ y

$\sum_{j=2}^{m(i)} c_{ij}^{i} < d^{i}$, entonces la variable x_{i_1} tiene valor 1 y, en consecuencia, las demás variables satisfacen la desigualdad

$$\sum_{j=2}^{m(i)} c_{ij}^{i} x_{i_j} \geq d^{i} - c_{i_1}^{i}$$

6°) Si $d^{i} > 0$, $\quad c_{ij}^{i} < d^{i}$, $\quad (j \in \{1,2, \ldots ,m(i)\})$ y $\sum_{j=1}^{m(i)} c_{ij}^{i} > d^{i}$ y

$\sum_{j=2}^{m(i)} c_{ij}^{i} \geq d^{i}$, entonces existen dos posibilidades

(σ_1) $x_{i_1} = 1$, y, en consecuencia, las demás variables satisfacen la desigualdad

$$\sum_{j=2}^{m(i)} c_{ij}^{i} x_{ij} \geq d^{i} - c_{i_1}^{i} ,$$

(σ_2) $x_{i_1} = 0$ y, en consecuencia, las demás variables satisfacen la desigualdad

$$\sum_{j=2}^{m(l)} c_{ij}^{l} x_{ij} \geq d^{l}$$

Así como se ve, existen situaciones en las que algunas variables son fijadas (conclusiones (4°) y (5°), otras en las que el sistema no tiene solución (conclusión 3°), otras en las que la desigualdad considerada es redundante (conclusión (1°)), todos estos casos se llaman **determinados** Existen situaciones en las que prácticamente no disponemos de ningún tipo de información (conclusión (6°)), así que estamos obligados a dividir la discusión en otras dos conclusiones (σ_1 y σ_2)., estos casos vamos a llamarlos **no determinados** Finalmente, existen situaciones en las que la discusión debe dividirse en (p + 1) opciones con información creciente (conclusión (2°)), estos casos se llaman **parcialmente determinados**

Orden preferencial	Conclusiones	Caso
1	(1°), (3°), (4°), (5°)	Determinado
2	(2°)	Parcialmente determinado
3	(6°)	No determinado (Indeterminado)

La tercera etapa (etapa 3) del proceso de resolución de sistemas de inecuaciones continúa así

Si algunas desigualdades pertenecen a algunos casos determinados, entonces obtenemos todas las conclusiones posibles y las confrontamos Dos situaciones pueden aparecer, que exista alguna desigualdad sin solución, o que dos desigualdades diferentes conduzcan a conclusiones incompatibles $x_i = 1$ y $x_i = 0$, entonces el sistema es incompatible En los otros casos los valores de ciertas variables son determinados y esto nos conduce a un sistema de dimensiones más pequeñas que debemos examinar posteriormente

Si ninguna de las desigualdades se encuentra en los casos determinados, pero existen desigualdades en los casos parcialmente determinados, entonces seguimos con las conclusiones correspondientes a una de las desigualdades de este caso Parece ventajoso que se elija aquella desigualdad en la que p es el mayor

En fin, si todas las desigualdades se encuentran en los casos no determinados, bifurcamos la discusión con respecto a una de las variables, parece ventajoso que se elija la variable que aparece con coeficiente más grande en el sistema

Queda claro entonces que **el proceso anterior conduce a todas las soluciones del sistema de desigualdades lineales con variables bivalentes considerado**

Por supuesto, el sistema anterior puede ser enriquecido con reglas suplementarias con miras a acelerar los càlculos Sin embargo, en el ejemplo que sigue nos hemos abstenido de modo consistente de la utilización de observaciones directas, para ilustrar nada más la esencia del proceso

Observación Las familias de soluciones obtenidas anteriormente corresponden a caminos distintos en el sistema de soluciones, y así, ellas son dos a dos disjuntas

2 3 1 **Ejemplo II** Consideremos el sistema

(12 1) $x_1 - 3x_2 + 12x_3 + x_5 - 7x_6 + x_7 - 3x_{10} + 5x_{11} + x_{12} - 6 \geq 0$

$$x_1 - 3(1 - x_2) + 12x_3 + x_5 - 7(1 - x_6) + x_7 - 3(1 - x_{10}) + 5x_{11} + x_{12} - 6 \geq 0$$

$$x_1 - 3 + 3x_2 + 12x_3 + x_5 - 7 + 7x_6 + x_7 - 3 + 3x_{10} + 5x_{11} + x_{12} - 6 \geq 0$$

$$x_1 + 3\bar{x}_2 + 12x_3 + x_5 + 7x_6 + x_7 + 3x_{10} + 5x_{11} + x_{12} \geq 19$$

(12 2) $-3x_1 + 7x_2 - x_4 - 6x_5 + 1 \geq 0$

$$-3(1 - x_1) + 7x_2 - (1 - x_4) - 6(1 - x_5) + 1 \geq 0$$

$$-3 + 3x_1 + 7x_2 - 1 + x_4 - 6 + 6x_5 + 1 \geq 0$$

$$3x_1 + 7x_2 + x_4 + 6x_5 \geq 9$$

(12 3) $-11x_1 - x_3 + 7x_4 + x_6 - 2x_7 - x_8 + 5x_9 - 9x_{11} - 4 \geq 0$

$$-11(1-\bar{x}_1)-(1-\bar{x}_3)+7x_4+x_6-2(1-\bar{x}_7)-(1-\bar{x}_8)+5x_9-9(1-\bar{x}_{11})-4\geq 0$$

$$-11+11\bar{x}_1-1+\bar{x}_3+7x_4+x_6-2+2\bar{x}_7-1+\bar{x}_8+5x_9-9+9\bar{x}_{11}-4\geq 0$$

$$11\bar{x}_1+\bar{x}_3+7x_4+x_6+2\bar{x}_7+\bar{x}_8+5x_9+9\bar{x}_{11}\geq 28$$

(12 4) $-5x_2-6x_3+12x_5-7x_6-3x_8-x_9+8x_{10}-5x_{12}+8\geq 0$

$$-5(1-\bar{x}_2)-6(1-\bar{x}_3)+12x_5-7(1-\bar{x}_6)-3(1-\bar{x}_8)-(1-\bar{x}_9)+8x_{10}-5(1-\bar{x}_{12})+8\geq 0$$

$$-5+5\bar{x}_2-6+6\bar{x}_3+12x_5-7+7\bar{x}_6-3+3\bar{x}_8-1+\bar{x}_9+8x_{10}-5+5\bar{x}_{12}+8\geq 0$$

$$5\bar{x}_2+6\bar{x}_3+12x_5+7\bar{x}_6+3\bar{x}_8+\bar{x}_9+8x_{10}+5\bar{x}_{12}\geq 19$$

(12 5) $7x_1+x_2+5x_3-3x_4-x_5+8x_6+2x_8-7x_9-x_{10}+7x_{12}-7\geq 0$

$$7x_1+x_2+5x_3-3(1-\bar{x}_4)-(1-\bar{x}_5)+8x_6+2x_8-7(1-\bar{x}_9)-(1-\bar{x}_{10})+7x_{12}-7\geq 0$$

$$7x_1+x_2+5x_3-3+3\bar{x}_4-1+\bar{x}_5+8x_6+2x_8-7+7\bar{x}_9-1+\bar{x}_{10}+7x_{12}-7\geq 0$$

$$7x_1+x_2+5x_3+3\bar{x}_4+\bar{x}_5+8x_6+2x_8+7\bar{x}_9+\bar{x}_{10}+7x_{12}\geq 19$$

(12 6) $2x_1+4x_4+3x_7+5x_8+x_9-x_{11}-x_{12}-4\geq 0$

$$2x_1+4x_4+3x_7+5x_8+x_9-(1-\overline{x_{11}})-(1-\overline{x_{12}})-4\geq 0$$

$$2x_1+4x_4+3x_7+5x_8+x_9-1+\bar{x}_{11}-1+\bar{x}_{12}-4\geq 0$$

$$2x_1+4x_4+3x_7+5x_8+x_9+\overline{x_{11}}+\overline{x_{12}}\geq 6$$

que puede ser llevado a la forma equivalente

(13 1) $12x_3 + 7\bar{x}_6 + 5x_{11} + 3\bar{x}_2 + 3\bar{x}_{10} + x_1 + x_5 + x_7 + x_{12} \geq 19$

(13 2) $7x_2 + 6\bar{x}_5 + 3\bar{x}_1 + \bar{x}_4 \geq 9$

(13 3) $11\bar{x}_1 + 9\bar{x}_{11} + 7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 + \bar{x}_3 + x_6 + \bar{x}_8 \geq 28$

(13 4) $12x_5 + 8x_{10} + 7\bar{x}_6 + 6\bar{x}_3 + 5\bar{x}_2 + 5\bar{x}_{12} + 3\bar{x}_8 + \bar{x}_9 \geq 19$

(13 5) $8x_6 + 7x_1 + 7\bar{x}_9 + 7x_{12} + 5x_3 + 3\bar{x}_4 + 2x_8 + x_2 + \bar{x}_5 + \bar{x}_{10} \geq 19$

(13 6) $5x_8 + 4x_4 + 3\bar{x}_7 + 2x_1 + x_9 + \bar{x}_{11} + \bar{x}_{12} \geq 6$

Observamos que, siguiendo el orden preferencial, ninguna desigualdad de este sistema se encuentra en los casos 1°, 3° o 4°. Sin embargo, observamos que la desigualdad (13 3) está en el 5° caso implicando $\bar{x}_1 = 1$, o sea $x_1 = 0$ y que $9\bar{x}_{11} + 7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 + \bar{x}_3 + x_6 + \bar{x}_8 \geq 17$.

Introducimos este valor en el sistema y observamos que ninguna desigualdad se encuentra en algún caso determinado; la relación (13 2) se reduce a.

$$7x_2 + 6\bar{x}_5 + \bar{x}_4 \geq 6$$

que se encuentra en el caso 2°. Se deben considerar las siguientes tres alternativas

α_1) $x_2 = 1$

$\alpha_2)$ $x_2 = 0$, $\bar{x}_5 = 1$

$\beta_2)$ $x_2 = \bar{x}_5 = 0$ y $\bar{x}_4 \geq 6$, lo cual es imposible, luego esta alternativa se elimina (*)

Iniciemos con la alternativa $\alpha_1)$ que implica la verificación de la desigualdad (13 2) y $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ Estos valores reducen la desigualdad (13 1) a

$$12x_3 + 7\bar{x}_6 + 5x_{11} + 3\bar{x}_{10} + x_5 + x_7 + x_{12} \geq 19$$

y se encuentra en el caso 5° implicando $x_3 = 1$ y que $7\bar{x}_6 + 5x_{11} + 3\bar{x}_{10} + x_5 + x_7 + x_{12} \geq 7$

Los valores x_1=0, x_2=1, x_3=1 reducen (13.3) a la desigualdad

$9\bar{x}_{11} + 7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 + x_6 + \bar{x}_8 \geq 17$

que está de nuevo en el caso 5° implicando $\bar{x}_{11} = 1 \Leftrightarrow x_{11} = 0$ y que $7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 + x_6 + \bar{x}_8 \geq 8$.

Ahora la desigualdad (13 1) se reduce a

$7\bar{x}_6 + 3\bar{x}_{10} + x_5 + x_7 + x_{12} \geq 7$

que de nuevo en el caso 5°, implica $\bar{x}_6 = 1 \Leftrightarrow x_6 = 0$ y que $3\bar{x}_{10} + x_5 + x_7 + x_{12} \geq 0$.

La desigualdad (13 1) se transforma en

$3\overline{x_{10}} + x_5 + x_7 + x_{12} \geq 0$

la cual es una desigualdad redundante por caso 1° (*), y así el sistema (13) se reduce a

(14.0) $x_1 = x_6 = x_{11} = 0 \quad , \qquad x_2 = x_3 = 1$

(14 3) $7x_4 + 5x_9 + 2\overline{x_7} + \overline{x_8} \geq 8$

(14.4) $12x_5 + 8x_{10} + 5\overline{x_{12}} + 3\overline{x_8} + \overline{x_9} \geq 12$

(14 5) $7\overline{x_9} + 7x_{12} + 3\overline{x_4} + 2x_8 + \overline{x_5} + \overline{x_{10}} \geq 13$

(14 6) $5x_8 + 4x_4 + 3x_7 + x_9 + \overline{x_{12}} \geq 5$

Las desigualdades (14 4) y (14 6) están en el 2° caso, mientras que (14.3) y (14.5) pertenecen al caso 6°.

Efectuando la bifurcación que resulta de (14 6).

α') $\quad x_8 = 1 \qquad$ y $\qquad 4x_4 + 3x_7 + x_9 + \overline{x_{12}} \geq 0$ que es una desigualdad redundante (*)

β') $\quad x_8 = 0 \qquad$ y $\qquad 4x_4 + 3x_7 + x_9 + \overline{x_{12}} \geq 5$

En la alternativa α', la desigualdad (14.3) se reduce a.

$7x_4 + 5x_9 + 2\overline{x_7} \geq 8$

que se encuentra en el caso 5°, implicando $x_4 = 1$ y $5x_9 + 2\overline{x_7} \geq 1$

Por consiguiente (14 5) se transforma en

$7\bar{x}_9 + 7x_{12} + \bar{x}_5 + \bar{x}_{10} \geq 11$

y por eso (caso 5°), $\bar{x}_9 = 1$ y $7x_{12} + \bar{x}_5 + \bar{x}_{10} \geq 4$

Esta ùltima desigualdad se encuentra en el caso 5° nuevamente, implicando $x_{12} = 1$, y que $\bar{x}_5 + \bar{x}_{10} \geq -3$, desigualdad del caso 1° redundante (*)

Ahora (14 3) se transforma en

$2\bar{x}_7 \geq 1$

y luego $\bar{x}_7 = 1 \Leftrightarrow x_7 = 0$.

Más adelante (14 4) se transforma en

$12x_5 + 8x_{10} \geq 11$

que el caso 5° implica $x_5 = 1$ y $8x_{10} \geq -1$, que en el caso 1°, implica que x_{10} es arbitrario, es decir, $x_{10} = 0$ ó $x_{10} = 1$

Estos valores satisfacen el sistema (14), mostrando que hemos encontrado las siguientes soluciones de (13)

(15)	x_1=0	x_2=1	x_3=1	x_4=1	x_5=1	x_6=0
	x_7=0	x_8=1	x_9=0	x_{10} arbitrario	x_{11}=0	x_{12}=1

En la alternativa β', x_8=0, la desigualdad (14 5) se transforma en

$7\bar{x}_9 + 7x_{12} + 3\bar{x}_4 + \bar{x}_5 + \bar{x}_{10} \geq 13$

que se encuentra en el caso 5°

implicando $\bar{x}_9 = 1 \Leftrightarrow x_9 = 0$ y $7x_{12} + 3\bar{x}_4 + \bar{x}_5 + \bar{x}_{10} \geq 6$

la cual otra vez en el caso 5° implica

$x_{12} = 1$ y $3\bar{x}_4 + \bar{x}_5 + \bar{x}_{10} \geq -1$, la cual resulta ser una desigualdad redundante por el caso 1° (*)

Más adelante (14 6) se transforma en

$4x_4 + 3x_7 \geq 5$

que en el caso 5° implica

$x_4 = 1$ y $3x_7 \geq 1$, luego $x_7 = 1$

Además se satisface (14 3) para $x_8=0$, $x_9=0$, $x_4=1$, $x_7=1$

Entonces las desigualdades (14 3), (14 5) y (14 6) son verificadas, así el sistema (14) se reduce a (14 4) el cual se transforma en

$12x_5 + 8x_{10} \geq 8$

Esta desigualdad en el caso 2° se resuelve tomando ya sea ($x_5=1$), ó ($x_5=0$ y $x_{10}=1$) Se obtienen así las siguientes soluciones del sistema (13)

(16)	$x_1=0$	$x_2=1$	$x_3=1$	$x_4=1$	$x_5=1$	$x_6=0$
	$x_7=1$	$x_8=0$	$x_9=0$	x_{10} arbitrario	$x_{11}=0$	$x_{12}=1$

y

(17) $x_1=0$ $x_2=1$ $x_3=1$ $x_4=1$ $x_5=0$ $x_6=0$

$x_7=1$ $x_8=0$ $x_9=0$ $x_{10}=1$ $x_{11}=0$ $x_{12}=1$

Queda por estudiar la alternativa α_2: $x_2 = 0$, $x_5 = 0$

(17.0) $x_1 = x_2 = x_5 = 0$

(17.1) $12x_3 + 7\bar{x}_6 + 5x_{11} + 3\bar{x}_{10} + x_7 + x_{12} \geq 16$

(17.3) $9\bar{x}_{11} + 7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 + \bar{x}_3 + x_6 + \bar{x}_8 \geq 17$

(17.4) $8x_{10} + 7\bar{x}_6 + 6\bar{x}_3 + 5\bar{x}_{12} + 3\bar{x}_8 + \bar{x}_9 \geq 14$

(17.5) $8x_6 + 7\bar{x}_9 + 7x_{12} + 5x_3 + 3\bar{x}_4 + 2x_8 + \bar{x}_{10} \geq 18$

(17.6) $5x_8 + 4x_4 + 3x_7 + x_9 + \bar{x}_{11} + \bar{x}_{12} \geq 6$

Teniendo en cuenta que todas estas desigualdades se encuentran en el caso 6°, debemos hacer una bifurcación, para la cual partimos de la variable x_8, o sea

σ_1) $x_8 = 1$ y σ_2) $x_8 = 0$

En la alternativa σ_1, tenemos $x_8 = 1$ y por lo tanto (17.6) pasa a ser

$4x_4 + 3x_7 + x_9 + \bar{x}_{11} + \bar{x}_{12} \geq 1$ y (17.3) se reduce a

$9\bar{x}_{11} + 7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 + \bar{x}_3 + x_6 \geq 17$

que se encuentra en el caso 5° e implica $\overline{x_{11}} = 1 \Leftrightarrow x_{11} = 0$ y consecuentemente

$7x_4 + 5x_9 + 2\overline{x_7} + \overline{x_3} + x_6 \geq 8$

Después (17 1) se transforma en

$12x_3 + 7\overline{x_6} + 3\overline{x_{10}} + x_7 + x_{12} \geq 16$

implicando (caso 5°) $x_3 = 1$ y que $7\overline{x_6} + 3\overline{x_{10}} + x_7 + x_{12} \geq 4$.

Ahora la desigualdad (17 4) deviene en

$8x_{10} + 7\overline{x_6} + 5\overline{x_{12}} + \overline{x_9} \geq 14$

implicando así (caso 5°) $x_{10} = 1$ y $7\overline{x_6} + 5\overline{x_{12}} + \overline{x_9} \geq 6$

luego (17 1) queda como sigue

$7\overline{x_6} + x_7 + x_{12} \geq 4$

que se encuentra en el caso 2° Considerando $\overline{x_6} = 0$ implica $x_7 + x_{12} \geq 4$ desigualdad sin solución (*), luego tenemos que tomar $\overline{x_6} = 1$, la desigualdad (17.1) se verifica de esta forma

Ahora (17.3) se transforma en

$7x_4 + 5x_9 + 2\overline{x_7} \geq 8$

que se encuentra en el caso 5° e implica $x_4 = 1$ y consecuentemente $5x_9 + 2\overline{x_7} \geq 1$, la cual en el caso 2° implica

$(x_9=1$ y $\bar{x}_7=0)$ ó $(x_9=0$ y $\bar{x}_7=1)$

Más adelante la desigualdad (17.5) se reduce a

$$7\bar{x}_9+7x_{12}\geq 11$$

que en el caso 5° implica $\bar{x}_9=1 \Leftrightarrow x_9=0$ y $7x_{12}\geq 4$, o sea $x_{12}=1$

Ahora la desigualdad (17 3) queda $2\bar{x}_7\geq 1$ lo cual implica $\bar{x}_7=1$

Los valores así encontrados satisfacen el sistema (17), de donde resulta que hemos encontrado la siguiente solución del sistema (13)

(18) $x_1=0$ $\quad x_2=0$ $\quad x_3=1$ $\quad x_4=1$ $\quad x_5=0,$ $\quad x_6=0$

$x_7=0$ $\quad x_8=1$ $\quad x_9=0$ $\quad x_{10}=1$ $\quad x_{11}=0,$ $\quad x_{12}=1$

En la alternativa $\sigma_2)$ $x_8=0$, todas las desigualdades de (17) se encuentran en el caso 6°, vamos a bifurcar la discusión con respecto a x_{11}

$\sigma_1')$ $x_8=0, \quad x_{11}=1$

$\sigma_2')$ $x_8=x_{11}=0$

En la alternativa $\sigma_1')$, la desigualdad (17.3) queda en

$$7x_4+5x_9+2\bar{x}_7+\bar{x}_3+x_6\geq 16$$

lo que implica (caso 4°) $x_4=x_9=\bar{x}_7=\bar{x}_3=x_6=1$, de manera que (17.1) se reduce a la desigualdad

$$3\bar{x}_{10}+x_{12}\geq 11$$

que es incompatible

Queda estudiar la alternativa σ_2') en la que (17 1) se reduce a

$$12x_3 + 7\bar{x}_6 + 3\bar{x}_{10} + x_7 + x_{12} \geq 16$$

e implica (caso 5°), $x_3 = 1$ y consecuentemente $7\bar{x}_6 + 3\bar{x}_{10} + x_7 + x_{12} \geq 4$.

Por consiguiente el sistema (17) se transforma en

(18.0) $x_1 = x_2 = x_5 = x_8 = x_{11} = 0, \qquad x_3 = 1$

(18 1) $7\bar{x}_6 + 3\bar{x}_{10} + x_7 + x_{12} \geq 4$

(18 3) $7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 + x_6 \geq 7$

(18 4) $8x_{10} + 7\bar{x}_6 + 5\bar{x}_{12} + \bar{x}_9 \geq 11$

(18 5) $8x_6 + 7\bar{x}_9 + 7x_{12} + 3\bar{x}_4 + \bar{x}_{10} \geq 13$

(18 6) $4x_4 + 3x_7 + x_9 + \bar{x}_{12} \geq 5$

Observamos que las desigualdades (18.1) y (18.3) se encuentran en el caso 2°, mientras que las desigualdades (18 4), (18 5) y (18 6) se encuentran en el caso 6°

Iniciemos la bifurcación a partir de x_6.

Si $x_6 = 1$, entonces (18 1) se transforma en

$$3\bar{x}_{10} + x_7 + x_{12} \geq 4$$

luego (caso 5°), $\bar{x}_{10} = 1$ y $x_7 + x_{12} \geq 1$.

Al tiempo que (18 4) se reduce a

$$5\bar{x}_{12} + \bar{x}_9 \geq 11$$

que se encuentra en el caso 3°, desigualdad sin solución, por lo que esta desigualdad y el sistema son incompatibles.

Si $x_6 = 0$, la desigualdad (18 5) se reduce a

$$7\bar{x}_9 + 7x_{12} + 3\bar{x}_4 + \bar{x}_{10} \geq 13$$

implicando (caso 5°), $\bar{x}_9 = 1$ y

$$7x_{12} + 3\bar{x}_4 + \bar{x}_{10} \geq 6$$

o sea (caso 2°), $x_{12} = 1$, $3\bar{x}_4 + \bar{x}_{10} \geq -1$ (caso 1°, desigualdad redundante)

Ahora (18 3) se transforma en

$$7x_4 + 2\bar{x}_7 \geq 7$$

y luego $x_4 = 1$, mientras que (18.4) se reduce a $8x_{10} \geq 3$

implicando $x_{10} = 1$ Más adelante (18 6) se transforma en $3x_7 \geq 1$, o sea, $x_7 = 1$

Estos valores satisfacen el sistema (18), así que se ha obtenido la última solución del sistema (13)

$$(19)\quad x_1 = 0,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = 1,\quad x_4 = 1,\quad x_5 = 0,\quad x_6 = 0,$$

$$x_7 = 1,\quad x_8 = 0,\quad x_9 = 0,\quad x_{10} = 1,\quad x_{11} = 0,\quad x_{12} = 1$$

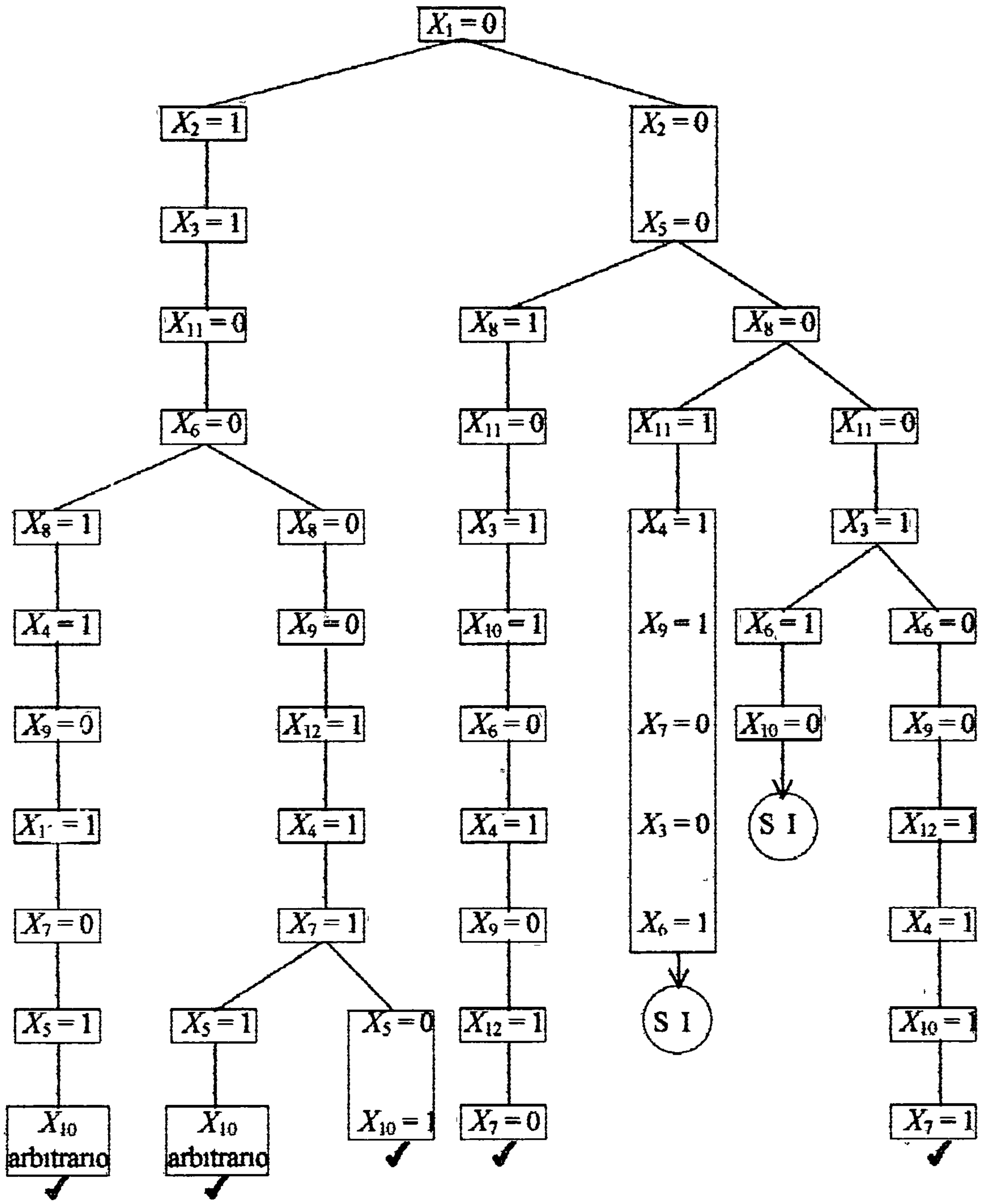
Por consiguiente, el tablero de todas las soluciones del sistema (13) que es equivalente al sistema (12), es el siguiente:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
0	1	1	1	1	0	0	1	0	_	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0	0	_	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1

2.4 Observaciones respecto al volumen de los cálculos

Siguiendo las etapas del proceso en el árbol de la Figura 1., llegamos a las siguientes conclusiones:

EJEMPLO II



S I . Sistema Inconsistente
✓ . Soluciones del Sistema

Figura 2

Se ve en que en lugar de hacer $2^{12} = 4096$ intentos, el proceso anterior nos ha permitido encontrar todas las soluciones pasando por 40 nodos del árbol considerado. También se ve que de los 7 caminos seguidos, 5 nos han conducido a soluciones del sistema, y que nada más 2 caminos han conducido a búsqueda infructuosa El caso menos favorable (la bifurcación) ha aparecido en total cinco veces, 6 de los nodos alcanzados por los caminos en el árbol considerado no tenían que ser examinados (*), pudiéndose pasar directamente a los nodos siguientes

Posteriormente veremos (Ejemplo V) que en el caso en que tengamos una función que optimizar, estos cálculos se simplifican mucho más.

CAPÍTULO 3

PROGRAMACIÓN PSEUDO-BOOLEANA

PROGRAMACIÓN PSEUDO-BOOLEANA

3.1 Método Pseudo-Booleano

La minimización de funciones con variables bivalentes

(20) $c_1 x_1 + ... + c_n x_n$

se efectúa sin ninguna dificultad. En efecto, los puntos se obtienen haciendo

(21) $x_i = \begin{cases} 1 & si \quad c_i < 0 \\ 0 & si \quad c_i > 0 \\ p_i & si \quad c_i = 0 \end{cases}$

donde p_i es un parámetro arbitrario en el conjunto $\{0, 1\}$.

3.1.1 Ejemplo III Los puntos de mínimo de la función con variables bivalentes

(22) $2 + 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 2x_6 - x_7$

son

(23) $x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = p_4, \quad x_5 = p_5, \quad x_6 = 0, \quad x_7 = 1$

donde p_4 y p_5 son parámetros arbitrarios con valores 0 ó 1

Luego, el valor mínimo de la función (22) es –6.

La minimización de funciones con variables bivalentes

(24) $f(x_1, ..., x_n) = f(X) = c_1 x_1 + ... + c_n x_n$

que satisfacen inecuaciones, se puede efectuar de modo similar

Más exactamente, podemos efectuar los siguientes pasos:

(1) La determinación de las soluciones del sistema de restricciones agrupadas en familias de soluciones $F_1, \quad, F_p$

(2) Para cada familia de soluciones F_k, la determinación de los valores

(25) $\min\limits_{X \in F_k} f(X)$

y de los puntos $X^0 \in F_k$ para los cuales

(26) $f(X^0) = \min\limits_{X \in F_k} f(X)$

(3) La determinación (por verificación directa) de los valores

(27) $\min\limits_{k \in \{1 \quad p\}} \min\limits_{X \in F_k} f(X)$

y de los puntos X^* para los cuales

(28) $f(X^*) = \min\limits_{k \in \{1, \quad, p\}} \min\limits_{X \in F_k} f(X)$

Queda ahora indicar, el modo de efectuar el paso (2)

Los vectores $X = (x_1, \quad, x_n)$ que aparecen en la familia de soluciones F_k son caracterizados por el hecho de que los valores x_i son fijados para los i que están contenidos en cierto conjunto de índices I_k

(29) $i \in I_k$ implica $x_i = x_i^*$ fijado en 0 ó en 1, mientras que x_j queda arbitrario para $j \notin I_k$

Razonando como en el caso anterior, es fácil ver que los puntos X^0 que satisfacen (26) son dados de la siguiente fórmula

$$(30)\quad x_i = \begin{cases} x_i^* & si \quad i \in I_k \\ 1 & si \quad i \notin I_k \quad y\ c_i < 0 \\ 0 & si \quad i \notin I_k \quad y\ c_i > 0 \\ p_i & si \quad i \notin I_k \quad y\ c_i = 0 \end{cases}$$

donde los p_i son parámetros arbitrarios con valores en el conjunto {0, 1}.

3.1.2 Ejemplo IV Minimizar la función

$$(31)\quad 3x_1 - 5x_2 + 3x_4 - x_5 + 8x_6 + 2x_7 + 4x_{10} + x_{11} - 3x_{12}$$

con las condiciones dadas por el sistema de inecuaciones (12), resuelto anteriormente en el Ejemplo II

(12 1) $x_1 - 3x_2 + 12x_3 + x_5 - 7x_6 + x_7 - 3x_{10} + 5x_{11} + x_{12} - 6 \geq 0$

(12 2) $-3x_1 + 7x_2 - x_4 - 6x_5 + 1 \geq 0$

(12.3) $-11x_1 - x_3 + 7x_4 + x_6 - 2x_7 - x_8 + 5x_9 - 9x_{11} - 4 \geq 0$

(12.4) $-5x_2 - 6x_3 + 12x_5 - 7x_6 - 3x_8 - x_9 + 8x_{10} - 5x_{12} + 8 \geq 0$

(12 5) $7x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 + 8x_6 + 2x_8 - 7x_9 - x_{10} + 7x_{12} - 7 \geq 0$

(12 6) $2x_1 + 4x_4 + 3x_7 + 5x_8 + x_9 - x_{11} - x_{12} - 4 \geq 0$

Reemplazando, en el tablero del ejemplo II, las soluciones encontradas que indican el hecho de que ciertas variables eran arbitrarias en una familia dada, con los valores de estas variables dadas por (30), obtenemos

Sol	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	Valores de (31)
1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	-6
2	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	-4
3	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	+1
4	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	+4
5	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	+6

Luego, el mínimo buscado es –6 y el punto mínimo es

(32) $x_1 = 0,\ x_2 = 1, x_3 = 1,\ x_4 = 1, x_5 = 1,\ x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 1, x_9 = 0,$

$x_{10} = 0, x_{11} = 0, x_{12} = 1$

$X^* = (0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$

3.2 Prescripciones para acelerar el proceso

El proceso anterior puede ser bastante acelerado aplicando las prescripciones que siguen.

3.2.1 La introducción de algunas restricciones suplementarias

Vamos a partir de la observación simple de que una vez que conozcamos los valores f_0 de la función que se va a minimizar en un punto $(x_1,\ldots,x_n)$ que satisface las restricciones, no nos interesan aquellas soluciones del sistema de restricciones en las que la función se optimiza con valores menos eficientes, o sea para f_0, en el caso de minimización, con valores más grandes Para validar esta idea podemos proceder como sigue.

Agregamos al sistema de restricciones la condición $f(X) \leq f_0$, donde f_0 es el margen superior de la función f, por ejemplo la suma de los coeficientes $c_i > 0$. Es decir, si conocemos desde el principio el punto $(x_1, \ldots, x_n)$ que satisface las restricciones, vamos a tomar directamente como f_0 el valor de la función f en este punto Si no nos interesa determinar todos los puntos de óptimo sino uno solo, entonces en lugar de $f(X) \leq f_0$ vamos a introducir la restricción $f(X) < f_0$

La restricción suplementaria es llevada a la forma canónica

$$g(X) = b_{i_1} \tilde{x}_{i_1} + \quad + b_{i_n} \tilde{x}_{i_n} \geq d_0$$

Vamos a observar que el mínimo de la función f difiere de –(máximo de la función g) por una constante aditiva, luego el problema nuestro es equivalente al de maximizar la función $g(X)$ con respecto a las mismas restricciones

Después que hemos encontrado la primera familia de soluciones F_1, buscamos el mínimo de la función f relativo a esta familia (los puntos en los cuales él es alcanzado), sea este mínimo f_1

Reemplazando la restricción $f(X) \leq f_0$ (restricción $f(X) < f_0$) por la restricción $f(X) \leq f_1$ (con $f(X) < f_1$), la cual llevamos a la forma canónica $g(X) \geq d_1$, después de lo cual continuamos el proceso de bifurcación así como lo aplicamos al mismo sistema Cada vez que encontramos nuevas soluciones –no necesariamente las más buenas - procedemos igual

Cuando el proceso de bifurcación termina, la última solución encontrada es además el óptimo buscado.

3.2.2 La elección del orden de bifurcación

Cuando nos encontramos en uno de los casos de no determinación o de determinación parcial (6°, 2°), vamos a hacer una bifurcación a partir de la variable $\tilde{x}_{ij}$ que es la primera en la restricción suplementaria $g(X) \geq d$, o sea vamos a tomar primero $\tilde{x}_{ij} = 1$, y después, $\tilde{x}_{ij} = 0$

3.2.3 El test acelerador

Sean $\tilde{x}_{i_1},\ldots,\tilde{x}_{i_n}$, las variables así como aparecen en la restricción $g(X) \geq d$ Supongamos que la última bifurcación antes de la última solución encontrada, ha sido con respecto a la variable $\tilde{x}_{ij}$ y ha resultado (por 3 2 2) $\tilde{x}_{ij} = 1$ Sea H (sea K) el conjunto de aquellos índices h (índices k) con las propiedades de que después de la bifurcación ha resultado $\overset{*}{x}_{ih} = 1$ (ha resultado $\overset{*}{x}_{ik} = 0$) Cuando vamos a explorar la rama $\overset{*}{x}_{ij} = 0$, es seguro que la función $g(X)$ cae en el valor b_{ij} y en el mejor de los casos, crece con el valor $\sum_{k \in K} b_{ik}$ (suponiendo, luego, el hecho de que todas las variables $\overset{*}{x}_{ih} (h \in H)$ quedan en 1 y que todas las variables $\overset{*}{x}_{ik} (k \in K)$ se transforman en 1) Por consiguiente si

$$(33) \quad b_{ij} > \sum_{k \in K} b_{ik}$$

es seguro que la rama $\overset{*}{x}_{ij} = 0$ conducirá a una solución menos eficiente por lo que no vamos a explorar esta rama

3.3 Ejemplo V Volvamos al ejemplo IV aplicando los procesos aceleradores (3 2 1, 3.2 2 y 3 2 3) anteriores Un margen superior de la función económica (31) es la suma de los coeficientes positivos 3 + 3 + 8+ 2 + 4 + 1 = 21. Vamos a agregar entonces la restricción suplementaria

$$\textbf{(34)} \quad 3x_1 - 5x_2 + 3x_4 - x_5 + 8x_6 + 2x_7 + 4x_{10} + x_{11} - 3x_{12} \leq 21$$

que llevada a la forma canónica queda como sigue.

$$3x_1 - 5(1 - \overline{x_2}) + 3x_4 - (1 - \overline{x_5}) + 8x_6 + 2x_7 + 4x_{10} + x_{11} - 3(1 - \overline{x_{12}}) \leq 21$$

$$3x_1 + 5\overline{x_2} + 3x_4 + \overline{x_5} + 8x_6 + 2x_7 + 4x_{10} + x_{11} + 3\overline{x_{12}} \leq 30$$

(34.0) $8\overline{x_6} + 5x_2 + 4\overline{x_{10}} + 3\overline{x_1} + 3\overline{x_4} + 3x_{12} + 2\overline{x_7} + x_5 + \overline{x_{11}} \geq 0$

Como en el ejemplo II, deducimos que $x_1 = 0$

Sigue después la primera bifurcación, según el criterio 3 2 2, para $\overline{x_6} = 1$ y el sistema deviene en

1') $12x_3 + 5x_{11} + 3\overline{x_2} + 3\overline{x_{10}} + x_5 + x_7 + x_{12} \geq 12$

2') $7x_2 + 6\overline{x_5} + \overline{x_4} \geq 6$

3') $9\overline{x_{11}} + 7x_4 + 5x_9 + 2\overline{x_7} + \overline{x_3} + \overline{x_8} \geq 17$

4') $12x_5 + 8x_{10} + 6\overline{x_3} + 5\overline{x_2} + 5\overline{x_{12}} + 3\overline{x_8} + \overline{x_9} \geq 12$

5') $7\overline{x_9} + 7x_{12} + 5x_3 + 3\overline{x_4} + 2x_8 + x_2 + \overline{x_5} + \overline{x_{10}} \geq 19$

6') $5x_8 + 4x_4 + 3x_7 + x_9 + \overline{x_{11}} + \overline{x_{12}} \geq 6$

La tercera inecuacion (caso 5°) implica $\overline{x_{11}} = 1$, lo que reduce la primera inecuación a

$$12x_3 + 3\overline{x_2} + 3\overline{x_{10}} + x_5 + x_7 + x_{12} \geq 12$$

que por el caso 5° resulta $x_3 = 1$ y $3\overline{x_2} + 3\overline{x_{10}} + x_5 + x_7 + x_{12} \geq 0$

Como la primera inecuación es resuelta, el resto del sistema se reduce al siguiente

2') $7x_2 + 6\bar{x}_5 + \bar{x}_4 \geq 6$

3') $7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 + \bar{x}_8 \geq 8$

4') $12x_5 + 8x_{10} + 5\bar{x}_2 + 5\bar{x}_{12} + 3\bar{x}_8 + \bar{x}_9 \geq 12$

5') $7\bar{x}_9 + 7x_{12} + 3\bar{x}_4 + 2x_8 + x_2 + \bar{x}_5 + \bar{x}_{10} \geq 14$

6') $5x_8 + 4x_4 + 3x_7 + x_9 + \bar{x}_{12} \geq 5$

Ninguna de las inecuaciones está en un caso determinado. Vamos a hacer entonces una nueva bifurcación tomando $x_2 = 1$. La primera inecuación es entonces resuelta y las otras quedan en casos no determinados Hacemos entonces una nueva bifurcación tomando $\bar{x}_{10} = 1$ El sistema queda como sigue

3') $7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 + \bar{x}_8 \geq 8$

4') $12x_5 + 5\bar{x}_{12} + 3\bar{x}_8 + \bar{x}_9 \geq 12$

5') $7\bar{x}_9 + 7x_{12} + 3\bar{x}_4 + 2x_8 + \bar{x}_5 \geq 12$

6') $5x_8 + 4x_4 + 3x_7 + x_9 + \bar{x}_{12} \geq 5$

De la segunda restricción (caso 5°) resulta ahora $x_5 = 1$, lo que resuelve esta inecuación y deja las demás sobre los otros casos no determinados

Hacemos aún otra bifurcación $\overline{x_4} = 1$ Entonces la primera inecuación implica que $x_9 = \overline{x_7} = \overline{x_8} = 1$, de donde la última inecuación queda en $\overline{x_{12}} \geq 4$ la cual no tiene solución

Volvemos a la última bifurcación, tomando $\overline{x_4} = 0$ El sistema deviene en

3') $5x_9 + 2\overline{x_7} + \overline{x_8} \geq 1$

5') $7\overline{x_9} + 7x_{12} + 2x_8 \geq 12$

6') $5x_8 + 3x_7 + x_9 + \overline{x_{12}} \geq 1$

La segunda inecuación (caso 5°) implica $\overline{x_9} = 1$, de donde $7x_{12} + 2x_8 \geq 5$, que en el caso 5° implica $x_{12} = 1$ y $2x_2 \geq -2$, lo que resuelve la inecuación y reduce las otras a lo siguiente

3') $2\overline{x_7} + \overline{x_8} \geq 1$

6') $5x_8 + 3x_7 \geq 1$

Hacemos una bifurcación tomando $\overline{x_7} = 1$ (conforme al criterio de bifurcación con respecto a la función objetivo) Resulta $x_8 = 1$ y el sistema se ha resuelto El valor de la función económica es

(35)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	
$f($	0,	1,	1,	1,	1,	0,	0,	1,	0,	0,	0,	1	$)=-6$

Entonces agregamos la restricción $f(X) \leq -6$ que, llevada a la forma canónica, deviene en

(34 1) $8\bar{x}_6 + 5x_2 + 4\bar{x}_{10} + 3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_4 + 3x_{12} + 2\bar{x}_7 + x_5 + \bar{x}_{11} \geq 27$

De la última bifurcación con respecto a $\bar{x}_7$, tenemos $b_7 = 2$, $K = \phi$, luego la condición (33)

(33) $b_{ij} > \sum_{k \in K} b_{ik}$

se cumple y conforme al test acelerador no vamos a explorar $\bar{x}_7 = 0$.

La bifurcación anterior respecto a $\bar{x}_4$ es completada.

En la bifurcación anterior con respecto a $\bar{x}_{10}$, tenemos que allí $b_{10} = 4$, $K = \phi$, luego de nuevo el test acelerador nos muestra que no debemos investigar las ramas $\bar{x}_{10} = 0$.

La bifurcación anterior respecto a x_2, se encuentra en la misma situación ($b_2 = 5$, $K = \phi$), luego no vamos a investigar $x_2 = 0$

La bifurcación anterior es con respecto a $\bar{x}_6$ y se encuentra en la misma situación ($b_6 = 8$, $K = \phi$),, es decir, no vamos a explorar $\bar{x}_6 = 0$.

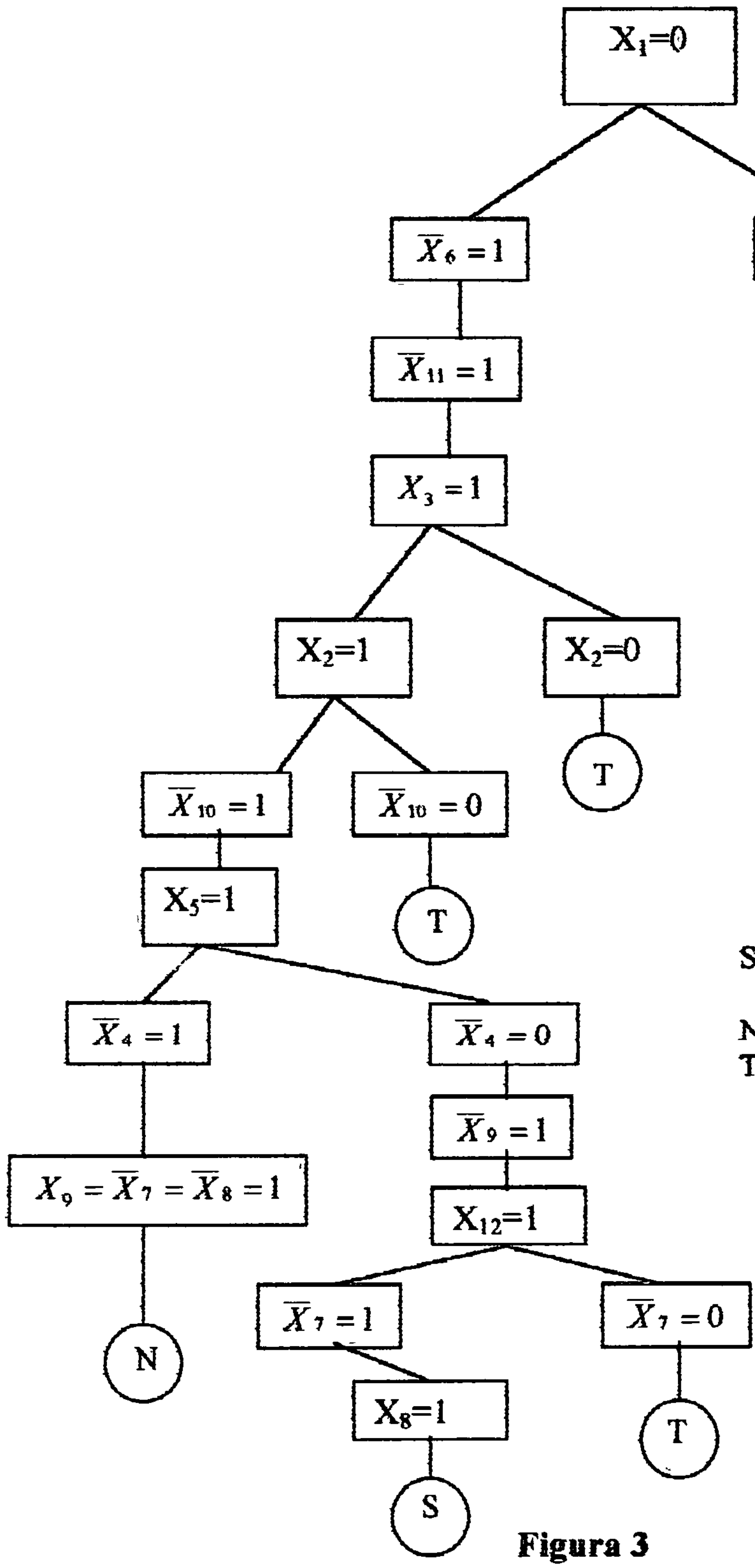
Así, gracias al test acelerador, sabemos que el proceso de bifurcación se ha terminado, sin tener necesidad de utilizar la restricción suplementaria (34 1)

La única solución es (35)

El árbol asociado al problema descrito es el de la figura 3 y se pueden seguir allí, de modo sintético, los cálculos del ejemplo V.

Aquí S significa soluciones del sistema de restricciones, N muestra que no tenemos soluciones y T que la rama respectiva no ha sido explorada, como lo indica el test acelerador

EJEMPLO V



S Solución del sistema de restricciones
N. No tenemos soluciones
T Rama no explorada

Figura 3

CAPÍTULO 4

APLICACIONES

APLICACIONES

4.1 Ejemplos

4 1 1 **Ejemplo VI**. Para el desarrollo de una industria está asignada una suma S. Existen n proyectos que pueden contribuir a la realización de este propósito Cada proyecto j necesita una cierta inversión denotada I_j y suministra un cierto beneficio b_j por año. El plan prevee la realización de una producción de al menos $\prod$ unidades anuales

El proyecto j permite la realización de una producción anual π_j. La realización del proyecto j requiere importar equipo con valor v_j, la cantidad total de importación admisible para el desarrollo de la industria que nos interesa es V Se pide tomar una decisión ¿cuáles de entre los proyectos posibles van a ser puestos en práctica, de tal manera que, respetándose las condiciones impuestas, se alcance el beneficio máximo?

Para resolver este problema asignamos a cada proyecto j ($j \in \{1, 2, \ldots, n\}$) una variable x_j que va a tomar valor 1 si el proyecto se ejecuta y 0 en el caso contrario

El problema se traduce en la siguiente forma.

Encuéntrese el máximo de la función

$$\max \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$$

con las variables bivalentes $x_1, \quad , x_n$, y las supuestas restricciones

$$\sum_{j=1}^{n} I_j x_j \leq S$$

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j x_j \geq \prod$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \leq V$$

4.1.2 Ejemplo VII: Vajda examina el siguiente problema

En cierta región geográfica accionan n emisiones de televisión por m canales La elección de los canales que emiten diversas estaciones debe hacerse de tal manera que las acciones con zonas comunes de emisiones funcionen en canales diferentes

El primer problema que se presenta es determinar atribuciones de los canales a las emisoras

Se supone además que después de un tiempo, el emisor (n+1) empiece a funcionar El problema se presenta en la siguiente forma ¿cómo se atribuyen los canales al emisor de tal manera que el número de canales que se cambian al canal de la emisión sea mínimo?

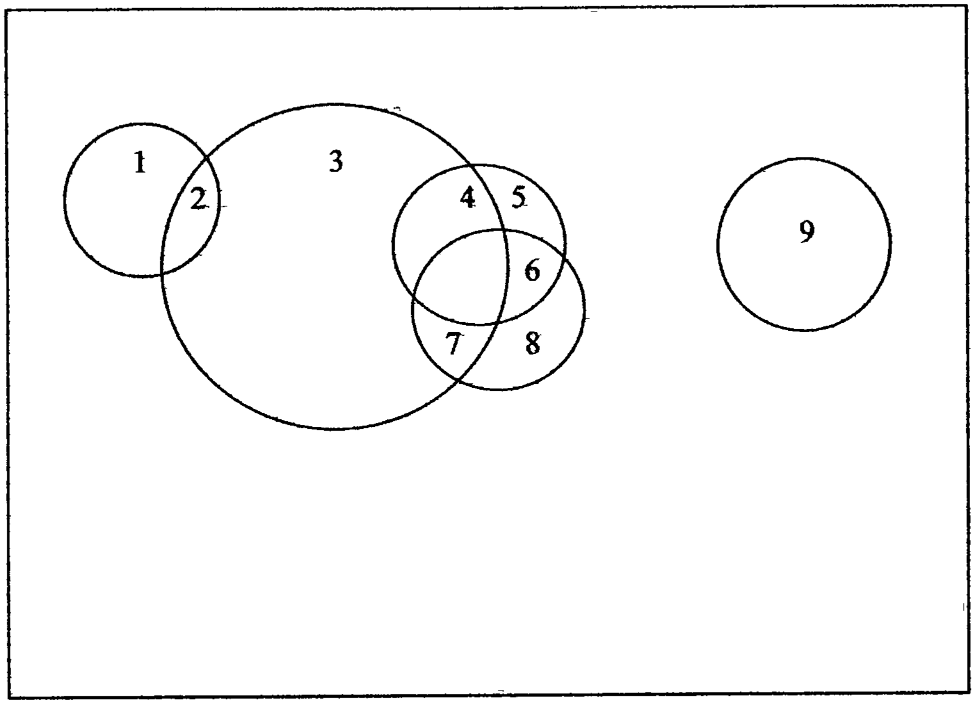


Figura 4
(Ejemplo de cinco emisiones por 9 canales)

Denotando i $(i \in \{1,2,...,n\})$ las emisiones, con $j \in \{1,2,..,m\}$ los canales, poniendo $v_{ik} = 1$ si no existe alguna región donde accionan ambas emisiones y $v_{ik} = 0$ en caso contrario; haciendo $a_{ij} = 1$ si al comienzo del proceso de la emisión i acciona el canal j, y $a_{ij} = 0$ en caso contrario, poniendo finalmente $x_{ij} = 1$ si después de entrar en funcionamiento el nodo emisor (n + 1), la estación i emite sobre el canal j, y, $x_{ij} = 0$ en caso contrario, llegamos al siguiente problema:

Que se determine la variable bivalente x_{ij} que maximiza la función.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij}$$

y satisface las condiciones

$\sum_j x_{ij} = 1$ $\quad (i \in \{1,2,..,n+1\})$ Cada emisión i emite en forma exclusiva sobre un área en un solo canal j.

$x_{ij} + x_{kj} \leq 1 + v_{ik}$ $\quad \begin{pmatrix} i \in \{1,2,...,n+1\} \\ k \in \{1,2,.\ ,n+1\} \end{pmatrix}$ Existe una sola emisión sobre el canal j.

La función que se va a maximizar nos indica el número de emisiones en que no se cambia el canal que emite.

4.1.3 **Ejemplo VIII:** La fabricación de n productos diferentes 1, 2,,.., n necesita la utilización de m máquinas 1, 2, ..., m; más precisamente, ponemos $a_{ij} = 1$ si la fabricación del producto i necesita la utilización de la máquina j, y hacemos $a_{ij} = 0$ en caso contrario. Sea p_i el precio de venta de la cantidad de producto i fabricado en cierto período de tiempo y q_j el precio de explotación de la máquina j en el período respectivo.

Hacemos $x_i = 1$ si el producto i es el que se va a fabricar y $x_i = 0$ en caso contrario. Ponemos $y_j = 1$ si la máquina j es utilizada en el proceso y $y_j = 0$ en caso contrario.

El problema de determinar el plan que asegura un beneficio máximo consiste entonces en determinar las cantidades x_i y y_j que maximizan la expresión

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \sum_{j=1}^{m} q_j y_j$$

satisfaciendo siempre las condiciones

Cualquiera que sea i $(i \in \{1,2,\ldots,n\})$, si $x_i = 1$ entonces existe al menos un j, $j \in \{1,2,\ldots,m\})$ tal que

$$a_{ij} = 1 \qquad \text{y} \qquad y_j = 1$$

En otras palabras, el problema se puede también formular como sigue.

Que se determine los valores de las variables bivalentes con valores en el conjunto $\{0, 1\}$, x_i, y_j que satisfacen las condiciones

$$\underbrace{\underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j}_{\left[\begin{array}{l}\text{Proceso de fabricación del}\\ \text{Producto } i \text{ con la utilización}\\ \text{máquina } j\end{array}\right]} \qquad \underbrace{x_i}_{\left[\begin{array}{l}\text{Se va a fabricar}\\ \text{el producto } i.\end{array}\right]}}_{\left[\begin{array}{l}\text{Al menos una máquina } j \text{ es usada}\\ \text{en la producción de } i\end{array}\right]} \qquad \geq 0$$

$$(i \in \{1,2,\ldots,n\})$$

y que se maximice en estas condiciones la expresión

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \sum_{j=1}^{m} q_j y_j$$

1 **Ejemplo IX** Para la conversión del IDAAN en una entidad moderna, eficiente y productiva está asignada a una suma S y existen al menos 10 proyectos que pueden contribuir a la realización de este propósito

1 Rehabilitación de la Planta Potabilizadora de Chilibre

2 Construcción de la Red de Distribución de Laguna Alta de Arraiján

3 Construcción de la línea paralela Chilibre María Henríquez – Tinajitas

4 Mejoras al Acueducto de Colón

5 Construcción de la Planta Potabilizadora de Pacora

6 Reconstrucción administrativa, técnica y comercial del IDAAN

7 Levantamiento de un catastro real de los clientes del IDAAN

8 Instalación de medidores

9 Ampliación de la Planta Potabilizadora de Chilibre

10 Programa de Optimización de la Red de Distribución

Cada proyecto j ($j \in \{1,2,3, \ ,10\}$, necesita una cierta inversión denotada I_j (en millones de dólares) y suministra un cierto beneficio b_j (en miles de usuarios beneficiados) por año

El plan prevee la realización de al menos Π unidades anuales (en millones de galones de agua potable)

El proyecto j permite la realización de una producción anual Π_j La realización del proyecto j requiere importar equipo por valor v_j, la cantidad total de importación admisible para la modernización del IDAAN es V (en maquinaria, técnicos, etc)

Se pide tomar una decisión ¿cuáles de entre los proyectos posibles van a ser puestos en práctica, de tal manera que, respetándose las condiciones impuestas, se alcance el beneficio máximo?

Para resolver este problema asignamos a cada proyecto j ($j \in \{1,2,3,\ldots,10\}$ una variable x_j que va a tomar valor 1 si el proyecto se ejecuta y 0 en el caso contrario

El problema se traduce en la siguiente forma

Encuéntrese el máximo de la función

$$\text{máx} \quad \sum_{j=1}^{10} b_j x_j$$

con las variables bivalentes $x_1, x_2, x_3, \quad x_{10}$ y las supuestas restricciones

$$\sum_{j=1}^{10} I_j x_j \leq S, \qquad \sum_{j=1}^{10} \Pi_j x_j \geq \Pi \qquad \sum_{j=1}^{10} v_j x_j \leq V$$

Las expresiones anteriores se identifican con el modelo del **ejemplo VI**

Supongamos que los datos son los del tablero siguiente

DATO	PROYECTO									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_j	6	8	3	7	10	9	9	10	11	7
I_j	5	4	4	4	7	8	6	7	10	4
Π_j	10	3	6	5	4	7	4	8	12	8
v_j	3	2	0	2	0	0	0	3	4	0

Se da una suma asignada S = 40, la producción obligatoria $\prod = 45$, la cuantía de divisa permitida es V = 10

(vi) Max $6x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 10x_5 + 9x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 7x_{10}$

Sujeta a las restricciones

(vi 1) $5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 6x_7 + 7x_8 + 10x_9 + 4x_{10} \leq 40$

$$-5(1-\bar{x}_1) - 4(1-\bar{x}_2) - 4(1-\bar{x}_3) - 4(1-\bar{x}_4) - 7(1-\bar{x}_5) - 8(1-\bar{x}_6) - 6(1-\bar{x}_7) -$$
$$-4(1-\bar{x}_{10}) \geq -40$$

(vi 2) $10x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 7x_6 + 4x_7 + 8x_8 + 12x_9 + 8x_{10} \geq 45$

(vi 3) $3x_1 + 2x_2 + 2x_4 + 3x_8 + 4x_9 \leq 10$

$$-3(1-\bar{x}_1) - 2(1-\bar{x}_2) - 2(1-\bar{x}_4) - 3(1-\bar{x}_8) - 4(1-\bar{x}_9) \geq -10$$

(1) $5\overline{x_1}+4\overline{x_2}+4\overline{x_3}+4\overline{x_4}+7\overline{x_5}+8\overline{x_6}+6\overline{x_7}+7\overline{x_8}+10\overline{x_9}+4\overline{x_{10}}+\geq 19$

(2) $10x_1+3x_2+6x_3+5x_4+4x_5+7x_6+4x_7+8x_8+12x_9+8x_{10}\geq 45$

(3) $3\overline{x_1}+2\overline{x_2}+2\overline{x_4}+3\overline{x_8}+4\overline{x_9}\geq 4$

(1 1) $10\overline{x_9}+8\overline{x_6}+7\overline{x_5}+7\overline{x_8}+6\overline{x_7}+5\overline{x_1}+4\overline{x_2}+4\overline{x_3}+4\overline{x_4}+4\overline{x_{10}}+\geq 19$

(1 2) $12x_9+10x_1+8x_8+8x_{10}+7x_6+6x_3+5x_4+4x_5+4x_7+3x_2\geq 45$

(1 3) $4\overline{x_9}+3\overline{x_1}+3\overline{x_8}+2\overline{x_2}+2\overline{x_4}\geq 4$

Como la desigualdad (1 3) se encuentra en el caso(2°) tenemos

$\overline{x_9}=1$ y $\overline{x_1}=\overline{x_8}=\overline{x_2}=\overline{x_4}=0$, lo que es equivalente a

$x_9=0$ y $x_1=x_8=x_2=x_4=1$

de donde resulta el sistema

(2 0) $x_1=x_2=x_4=x_8=1$, $x_9=0$

(2 1) $8\overline{x_6}+7\overline{x_5}+6\overline{x_7}+4\overline{x_3}+4\overline{x_{10}}\geq 9$

(2 2) $8x_{10}+7x_6+6x_3+4x_5+4x_7\geq 19$

Las dos desigualdades se encuentran en el caso 6° Tomemos de la desigualdad (2 1), la variable $\overline{x_6}$, para la cual existen dos posibilidades

$(\alpha_1)\overline{x_6}=1$ ó $(\alpha_2)\overline{x_6}=0$

Consideremos $(\alpha_1)\overline{x_6}=1\Leftrightarrow x_6=0$

Para $\bar{x}_6 = 1$ tenemos

(3 1) $7\bar{x}_5 + 6\bar{x}_7 + 4\bar{x}_3 + 4\bar{x}_{10} \geq 1$

(3.2) $8x_{10} + 6x_3 + 4x_5 + 4x_7 \geq 19$

Puesto que la desigualdad (3 2) se encuentra en el caso (5°), entonces tenemos

$x_{10} = 1$ y $6x_3 + 4x_5 + 4x_7 \geq 11$

de donde resulta el sistema

(4 1) $7\bar{x}_5 + 6\bar{x}_7 + 4\bar{x}_3 \geq 1$

(4 2) $6x_3 + 4x_5 + 4x_7 \geq 11$

Resulta que la desigualdad (4 2) se encuentra en el caso (5°) por lo que tenemos

$x_3 = 1$ y $4x_5 + 4x_7 \geq 5$

y resulta entonces el sistema

(5 1) $7\bar{x}_5 + 6\bar{x}_7 \geq 1$

(5 2) $4x_5 + 4x_7 \geq 5$

La desigualdad (5 2) se encuentra en el caso (5°), por lo que debemos considerar

$(\alpha_{11})x_5 = 1 \quad \Rightarrow \quad 4x_7 \geq 1$

Considerando $(\alpha_{11})x_5 = 1$ resulta el sistema

$$\left.\begin{array}{ll}(6.1) & 6\overline{x_7} \geq 1 \Rightarrow \overline{x_7} = 1 \\ (6.2) & 4x_7 \geq 1 \Rightarrow x_7 = 1\end{array}\right\} \text{Contradicción}$$

Luego, por esta rama no tenemos una solución al sistema

Veamos

$(\alpha_2)\overline{x_6} = 0 \Leftrightarrow x_6 = 1$

Para $\overline{x_6} = 0$ tenemos el sistema

(8.1) $7\overline{x_5} + 6\overline{x_7} + 4\overline{x_3} + 4\overline{x_{10}} \geq 9$

(8.2) $8x_{10} + 6x_3 + 4x_5 + 4x_7 \geq 12$

Las dos desigualdades se encuentran en el caso (6°), por lo que la variable x_{10} tiene dos posibilidades

$(\alpha_{21})x_{10} = 1$ ó $(\alpha_{22})x_{10} = 0$

Consideramos válido $(\alpha_{21})x_{10} = 1$

De aquí resulta el sistema

(9.0) $x_1 = x_2 = x_4 = x_6 = x_8 = x_{10} = 1$, $x_9=0$

(9 1) $7\bar{x}_5 + 6\bar{x}_7 + 4\bar{x}_3 \geq 9$

(9 2) $6x_3 + 4x_5 + 4x_7 \geq 4$

La desigualdad (9 2) se encuentra en el caso (2°), por lo que debemos considerar tres posibilidades

$(\alpha_{211}) x_3 = 1$, $x_5=x_7=0$, $(\alpha_{212}) x_3 = 0$, $x_5=1$, $x_7=0$, $(\alpha_{213}) x_3 = x_5 = 0$, $x_7=1$

Para (α_{211}) las dos desigualdades del sistema son resueltas Por esta rama hemos encontrado una solución para el sistema de desigualdades dada por

	x_1,	x_2,	x_3,	x_4,	x_5,	x_6,	x_7,	x_8,	x_9,	x_{10}
P1	1,	1,	1,	1,	0,	1,	0,	1,	0,	1

Falta considerar las posibilidades (α_{212}) y (α_{213}) Para $(\alpha_{212}) x_3 = 0$, $x_5=1$, $x_7=0$, resulta el sistema

(10 0) $x_1 = x_2 = x_4 = x_6 = x_8 = x_{10} = 1$, $x_9=0$

(10 1) $10 \geq 9$

(10 2) $4 \geq 4$

donde las dos desigualdades son resueltas

Otra solución para el sistema de desigualdades es

$(x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5, \ x_6, \ x_7, \ x_8, \ x_9, \ x_{10})$

P2.(1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)

Para $(\alpha_{213}) x_3 = x_5 = 0$, x_7=1 resulta el sistema

(11 0) $x_1 = x_2 = x_4 = x_6 = x_8 = x_{10} = 1$, x_9=0

(11 1) $11 \geq 9$

(11 2) $4 \geq 4$

donde las dos desigualdades son resueltas Luego, una tercera solución del sistema de desigualdad es

$(x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5, \ x_6, \ x_7, \ x_8, \ x_9, \ x_{10})$

P3 (1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)

Para obtener

Máx $(6x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 10x_5 + 9x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 11x_9 + 7x_{10})$

valoriza...os la función objetivo en los puntos P1, P2 y P3

Para el punto P1 = (1, 1, 1, 1, 0, 1,0, 1, 0, 1)

el valor de la función resulta

B1 = 6(1)+8(1)+3(1)+7(1)+10(0)+9(1)+9(0)+10(1)+11(0)+7(1)

B1 = 50

Para el punto P2 = (1, 1, 0, 1, 1, 1,0, 1, 0, 1) el valor de la función es

B2 = 6(1)+8(1)+3(0)+7(1)+10(1)+9(1)+9(0)+10(1)+11(0)+7(1)

B2 = 57

Para el punto P3 = (1, 1, 0, 1, 0, 1,1, 1, 0, 1)

el valor de la función es

B3 = 6(1)+8(1)+3(0)+7(1)+10(0)+9(1)+9(1)+10(1)+11(0)+7(1)

B3 = 56

Observamos que, el valor máximo de la función objetivo se obtiene en el punto P2 = (1, 1, 0, 1, 1, 1,0, 1, 0, 1)

Veamos si existe otra solución.

Tomemos como válida en (8.1) y (8.2): $(\alpha)x_{10} = 0$

El sistema resultante será

(12.1) $7\overline{x_5} + 6\overline{x_7} + 4\overline{x_3} \geq 5$

(12.2) $6x_3 + 4x_5 + 4x_7 \geq 12$

Como (12.2) está en el caso 5°, tenemos

$$x_3 = 1 \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix} (13.1) \ 7\overline{x_5} + 6\overline{x_7} \geq 5 \\ (13.2) \ \ 4x_5 + 4x_7 \geq 6 \end{Bmatrix}$$

Ahora (13.2) se encuentra en el caso 5°; por lo que tenemos

$$x_5 = 1 \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix} (14.1) \ 6\overline{x_7} \geq 5 \\ (14.2) \ \ 4x_7 \geq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \overline{x_7} = 1 \\ x_7 = 1 \Rightarrow x_7 = 0 \end{cases}$$

lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, esta rama no nos conduce a ninguna otra solución del sistema.

Resuelto el problema por el método descrito en el capítulo 2, se llega a la conclusión de que la producción óptima asegura un beneficio de 57 mil usuarios beneficiados y consta de la realización de los proyectos 1, 2, 4,5, 6, 8 y 10, los proyectos 3, 7, 9 deben ser abandonados.

Observación: En este problema se han utilizado datos ficticios, pero el modelo queda a disposición para ser utilizado en el caso del problema real declarado a nivel nacional. (Periódico "La Prensa", Ediciones de los días 1° de agosto al 12 de agosto de 2001).

EJEMPLO IX

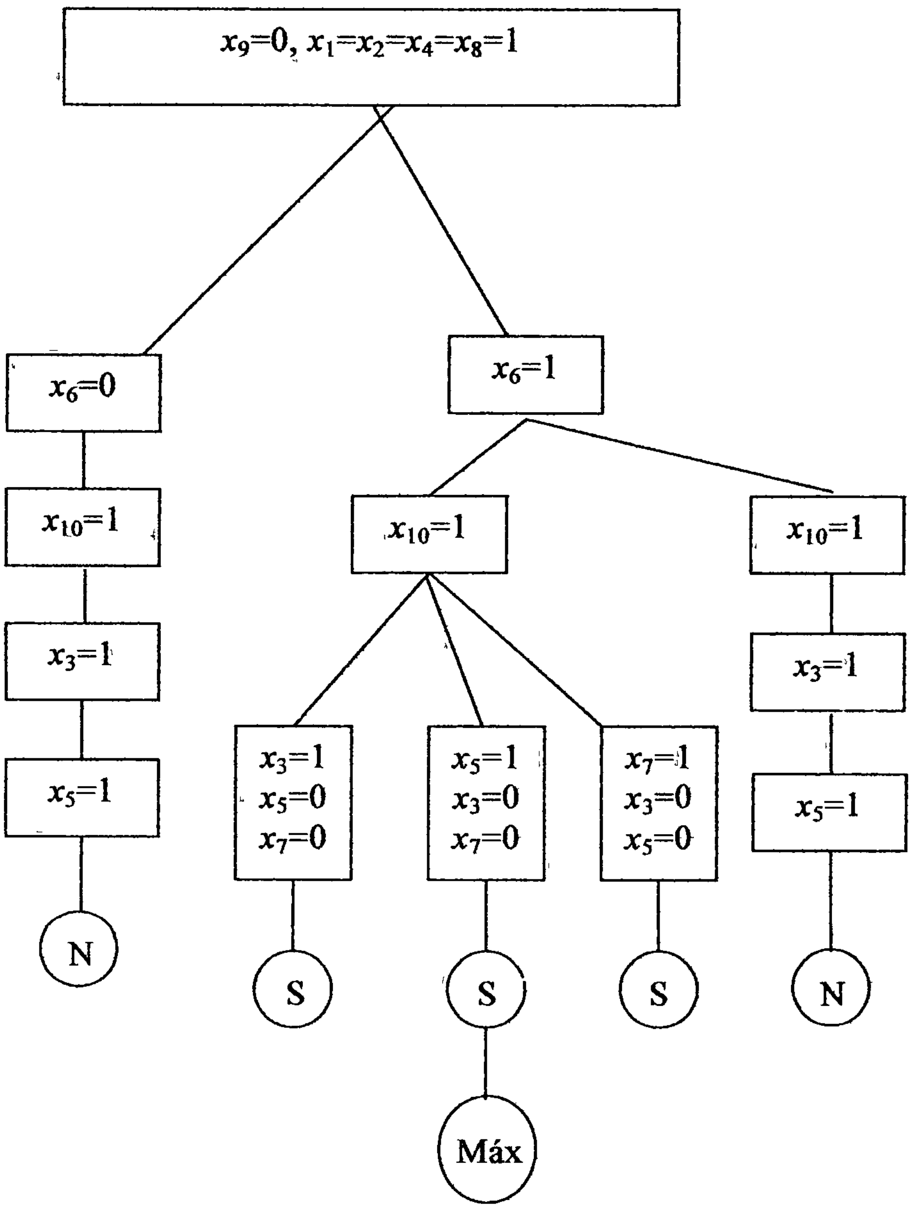


Figura 5

N: No hay solución
S: Solución del Sistema
Máx: Solución que proporciona el beneficio máximo.

El análisis de la estructura del problema anterior nos permite hacer las siguientes observaciones El número total de variantes que deben ser examinadas en caso de una enumeración total de todas las posibilidades es $2^{10} = 1024$ Este número no es prohibitivo, por lo que el problema se puede resolver por medios elementales

En la práctica, el número de variables puede ser fácilmente del orden de los cientos, lo que hace que el problema exija gran capacidad de memoria al resolverse por computadora

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

El estudio de la Programación Pseudo-Booleana lleva a las conclusiones siguientes

1 Son muchos los problemas prácticos que se pueden tratar, en planificación, con programación pseudo-booleana: de asignación, de transporte, de ordenamiento entre otros Así, con toda seguridad, el uso de la programación pseudo-booleana implica una fabulosa oportunidad de ahorrar en gastos de operaciones, en actividades como planificación, organización y administración.

2 Es importante conocer con relativa profundidad el comportamiento de las expresiones algebraicas discretas, en particular los sistemas de ecuaciones y desigualdades pseudo-booleanas, para abordar los métodos de programación pseudo-booleana

3 Para tener una mayor cobertura en el tratamiento de problemas, es importante estudiar los métodos para transformar problemas de optimización entera en problemas de programación bivalente

4 Aparte del estudio de los principios y fundamentos de cada algoritmo, es importante solucionar problemas prácticos y representar en esquemas los pasos intermediarios, de modo tal que siempre sea posible observar

el procedimiento global Este ejercicio es básico para desarrollar la destreza necesaria que luego se traduciría en una economía de procedimiento

5. Es posible abreviar la resolución de problemas de programación bivalente aplicando el acelerador del método pseudo-booleano que hemos estudiado en el capítulo 3

6 Una vez que el investigador de operaciones se sienta diestro en el manejo de los métodos pseudo-booleanos puede plasmar las rutinas en algún lenguaje de programación o tener a su disposición paquetes especializados para la resolución de estos problemas y ocuparse también de los análisis de sensibilidad

RECOMENDACIONES

Este estudio de Programación Pseudo-Booleana nos permite recomendar

1 Considerar la Programación Pseudo-Booleana entre las materias electivas de la Licenciatura

2 Estudiar cómo un problema de programación continua puede transformarse en un problema de programación discreta, así como también, cómo un problema de programación discreta puede ser transformado en un problema de programación pseudo-booleana.

3. Aplicar los procedimientos aceleradores de métodos en la resolución de problemas de programación pseudo-booleana

4 Que en el CENIO (Centro de Investigación de Operaciones de la Universidad de Panamá) se propongan soluciones a nivel nacional con el uso de técnicas como las tratadas en este trabajo

5 Trabajar en una colección de Problemas Resueltos y Problemas por Resolver del área de Programación Pseudo-Booleana

BIBLIOGRAFÍA

[1] **HAMMER, Peter L. and RUDEANU, Sergiu;** 1968
Boolean Methods in Operations Research
Springer - Verlag; Berlin, Heidelberg, New York

[2] **IVADORA, DINESCU C.; SALVULESCU B;** 1974
Modele Matematice de Organizarea si Conducerea Produtiei
Ed Didactica´si Pedagogica, Bucuresti

[3] **KAUFMANN A.; LABORDERE Henry ;** 1974
Methodes et Modéles de la Recherche Opérationnelle, vol. III
Dunod, Paris, Bruxelles, Montreal

[4] **MACRIS, Anatol; DUMITRU V.** 1972
Aplicatii a le Cercetari Operationale
Ed Academici, Bucuresti,

[5] **RUDEANU, Sergiu.** 1974
Boolean Funtions and Equations
American Elsevier Publishing Company, Inc , New York

[6] **SILVA REHERMAN Celiar.** 1985
Matemática Básica Superior
Editorial Científico Técnica, La Habana

[7] **STEFANESCU Anton .** 1982
Curs de Cercetàri Operationale
Universitatea di Bucuresti

[8] **TAHA Handy A.** 1995
Investigación de Operaciones
Alfaomega, Colombia